非平衡ダイナミクスの数理

西浦廉政

岩波書店

まえがき

パターンとは時空間における異なるスケールが共存しているものをいう．スケールとはなんだろう？　それは物事が時空で変化するときの速さの尺度である．空間方向に異なるスケールが共存していればそれはなんらかの不均一性を生み出す．その差があまり大きくなければ，「むら」が見えるだけであるが，極端に違えばくっきりとした「縁」が見える．

結晶成長における液相から固相への変化や化学反応系における酸化から還元への変化は状態(相)の変化が伴い，しかも急激に変化する場合が多い．また並び方の向きがある場所で一斉に変っていても境目ができる．とにかくなにか異質のものが隣り合うところ必ずパターンができるといってよいだろう．逆にこの急激な変化があるからこそ，われわれはパターンを認識できるともいえる．

時間方向の場合のスケールの共存のわかりやすい例として「うなり」がある．細かい振動ではなく，大きなゆったりとした振幅の変化がわれわれには聞こえる．モワレパターンはこの空間版ともいえる．

このような異なるスケールの共存する時空間パターンのダイナミクスを調べるのが本書の大きな目的である．

しかし，数学的には異なるスケールの共存は大きな困難をもたらす．それは一様性の消失である．古典的な永年項の処理の問題はその典型である．一様性を確保するためには，ひとつのスケールで見なければならないがそのとき全体像は失われてしまう．特異摂動論とはこれをなんとか解消するための努力であったともいえる．

本書を眺めてもらえばわかるように，もう一つのねらいは散逸系のダイナミクスの紹介である．散逸系とは外からエネルギーや物質を供給され，同時に老廃物を捨てることにより，その間に構造や秩序を作るものの総称である．

上で述べたものをはじめ，この地球やわれわれ自身もそうである．非線形ダイナミクスの宝庫ともいうべきこの散逸系をたとえ数学的側面にのみ限定してもうまく鳥瞰図を与えるのは難しい．そこで方法論を列挙するのではなく，スケールの分離と統合という観点からいくつかの話題をつなげることを試みた．そのために証明の詳細よりも全体の流れを重視した．

空間スケールの相違に伴う相変化の境目は一般に「界面」とよばれる．そのような界面がどのように現れ，どのように動き，どのような形状をとるのかが問題となる．本書の後半のテーマはそのような界面ダイナミクスであり，これは現在，散逸系のダイナミクスの中で最も活発に研究されている一分野である．水と油の界面からポリマーの境界面まで，計測技術の発展と共に，マクロからミクロまでさまざまなレベルで階層的に界面ダイナミクスが現れるが，ここで問題にするのはその骨格としての数理構造である．題材としては実体に沿ったモデルを取り扱うが，とりだすものは実体からは独立している．

筆者の不勉強のせいもあるが，多くの重要な題材や方法論を述べることができなかった．幾何学的特異摂動論や分岐理論も割愛せざるを得なかった．それにもかかわらず本書が多くの方にパターンダイナミクスの面白さの一端が伝えられればと願うしだいである．

この本は多くの方の協力に負っている．執筆を勧めてくれた畏友の俣野博氏には多くの貴重な助言を頂いた．同じ研究室の小林亮氏(現広島大学)には内容に関する議論のみならず多くの図の作成にもご協力頂いた．横浜市立大学の栄伸一郎氏(現九州大学)，和歌山大学の桑村雅隆氏(現神戸大学)には第1章を書くにあたり，多くの有益な情報を頂いた．北海道大学知識メディアラボラトリーの桜井建成君(現千葉大学)にはBZ反応の実験をしてもらい，また中村俊子さん(現城西大学)には詳しく原稿に目を通してもらった．原稿の最終段階では岩波書店の編集部の方にお世話になった．また多くの院生諸君とりわけ，上山大信君(現明治大学)には図の作成について，上田肇一君(現京都大学)には初期の原稿の整理から最後の仕上げまでお世話になった．ここに厚く感謝したい．

暮も押詰まった師走24日，恩師山口昌哉先生が亡くなられた．そのしなやかで闊達な精神に本書を捧げる．

1998年12月 札幌にて

西浦廉政

追記

本書は岩波講座「現代数学の展開」の1分冊『非線形問題1』を単行本化したものである．単行本にするにあたり，できるだけ講座のときの記述を生かす形にしたが，執筆時から10年近く経ったため新たに加わった内容，また進歩した部分も多い．それらの中でとくに発展の著しい第6章の遷移ダイナミクスについては，最新の研究成果を盛り込むために大幅に改訂した．また4.2節の内容に関連し，3次元空間における形態同定問題に有用な計算ホモロジーという手法の応用例を付録Aとして追加した．この付録の執筆においては寺本敬氏(千歳科学技術大学)の協力を得た．ここに感謝したい．

そのほか今後の方向と課題についても一部加筆，追加した．文献に関しても本来は全面的に見直し，追加，修正すべきであるが，今回は主に第6章に関わる部分のみに限定した．

2008年12月

西浦廉政

理論の概要

一様な状態にゆらぎが入り，そこから選択的にあるサイズが選ばれ，成長し，構造を作り，形を保持し，そして崩壊し，もとに戻るという動的なサイクルは生きていることを彷彿とさせるが，そのようなダイナミクスはどのような数理的機構に基づいて生まれるのであろうか？ ゆらぎが成長し得るという不安定性は Alan Turing による拡散不安定性が最も単純かつ直接的な示唆を与えた．それは一様化をもたらす拡散効果が逆に不安定化の駆動力ともなり得るという意味で衝撃的であった．

これは現在でいう対称性破壊分岐のはしりであったが，長らく実験系での再現が困難であったため，理論的な可能性のみにとどまっていた．しかし 90 年代に入り，化学反応系で実現可能となると，爆発的にその多彩なダイナミクスが発見され，現在では実験が先導している．第 6 章で述べる自己複製パターンも実はその流れの一端である．

形やリズムを保持するもう一つの有名な化学実験として第 4 章で現れる BZ 反応がある．これは一種の酸化・還元反応であるが，指示薬によりそれを色の違いとして見ることができる．渦巻波がその典型であり，それを駆動している数理的な機構は神経伝播波，液晶，アメーバの運動など多様な現象に共通している．

これらの形を認識するとき，われわれはその境目あるいは縁を見ている．境目はまさに，物事の状態(相)が急激に変化する所であり，逆にそこを見ているだけで全体を把握することができる．いわば縁に情報が集約されているというわけである．このことは自然に界面ダイナミクスへのアプローチへと導く．境目の界面がどのような運動をし，形をとるかに注目することにより，詳細を気にせず大幅に縮約された系——実際，最も単純な場合には超曲面の運動——を考えるだけで定性的にはその数理的構造を理解することができる．

ここでスケールの分離と統合という考えが裏に潜んでいることに注意しよう．すなわち界面付近での変化のスケールとそれ以外のところでのそれとが大きく異なることにより界面運動に縮約できるのである．結局のところ，スケールの違いをうまく利用して幾何学的に明確に，かつ次元の低減をはかって形のダイナミクスを理解しようというわけである．このとき定量的な情報はある程度失うが，定性的にはより普遍的な理解に到達できる．この見方は本書の基本テーマとなっている．

このときもとの方程式は同じでも極限で得られる界面ダイナミクスは一意には決まらない．もとの現象の何に興味があるかにより，それを決めていかねばならない．ここに無限次元系の面白さと難しさが出てくる．

スケールの分離は特異性とも密接に関係していることに注意しよう．分岐点ではある運動様式が他に比べてゆっくりとなり，漸近的にはその運動が系を支配していくことはよく知られている．したがって分岐点(不安定点)付近での運動様式はスケールの違いを利用して分離することができる．中心多様体をはじめ，一般に不変多様体はそのような観点から構成されている．

しかし問題によっては，最終的にどうなるかより，途中のある時間スケールにおいてどのような挙動がとられるかにより興味がある場合も多い．いいかえると，あるダイナミクスなり構造なりが自分の時間スケールから見て長い持続時間をもつかどうかで漸近的に扱えるか遷移的なものかに分かれるといってよい．すなわち物事が不変に見えるか，うつろひゆくかは相対的なもので，見るものと見られるものとの関係できまる．

この意味で面白いのは遷移的なダイナミクスである．しばらくは，ほぼ定まった形をとるが，それよりは長い時間で見れば崩れて，しばらくすると再び別の形をとり，また崩れる．これを永遠に繰り返す場合もあれば，ある所に落ち着く場合もある．ここでいう形とは文字通りきっちりとした時間不変なものである必要はなく，カオスであっても構わない．なんらかの構造を背景にもつダイナミクスであればよいのである．単なるシミュレーションではなく，計算機に大域的な解構造の探索をさせることにより，なぜそのようなことが起きるのかを知ることができる場合もある．いわば計算機が厳密理論

への橋渡しをしてくれるのである．本書の最後でその 1 つの例に読者は出会うであろう．以下，各章の概要を述べよう．

第 1 章では，古典的な永年項の問題や遷移層問題を考え直す．永年項問題とは「ちりも積もれば山となる」という効果をどのように処理するかということである．微小な摂動も十分長い時間の後には大きな変化をもたらす．そのようなゆっくりした時間変化をどのように取り込むかが問題となる．一方，流体に現れる境界層は 2 つの空間的スケールが共存する 1 つの典型例である．流体が静止した物体の側を流れるとき，その境界付近で速度はある有限の大きさから急激に零となる．境界付近でのみ効く粘性効果をどのように考慮するかが問題となる．またパターン形成問題においては内部遷移層が重要となるが，その位置や形状はどのように決まるのだろうか．これらの問題に対し，ある 1 つの観点を提供するのが第 1 章の目的である．それは遅い自由度をどのように取り出すかということに関わる．くり込み群の考え方もその文脈で捉えることができる．

第 2 章では，無限に広がった系における不安定点でのダイナミクスの標準形が振幅方程式であることを示す．領域が有限であればそこでの不安定化は離散的なスペクトルが関わり，中心多様体を始めとする種々の不変多様体上の流れを調べることにより，多くの情報が得られる．無限系では連続スペクトルの存在により，そのような不変多様体を構成することは容易ではない．しかし不安定点付近で系を支配するモード——最も不安定度が高い固有関数形——を座標にとり，その振幅がそこでの遅い時空スケールにどのように依存するかを見ることにより，長時間にわたる系の変化をとらえることができる．また，くり込み群による厳密な漸近挙動の特徴づけについても述べる．

第 3 章では，パターン選択問題を考える．自然界は多様なパターンを有するが，一方，一定の条件下では再現性もある．結晶成長では遠方でどれくらい冷やすかに応じて，その速度や形状は一意に決まる．何がそれを決めているのだろうか．この章では樹枝状結晶に対する簡単な歴史を述べた後，不安定領域に進行波が侵入していく場合の速度選択について議論する．これは与えられた摂動から一定の波形をもつ波までを記述する大域的問題となり，み

かけほどやさしくはない．実際，比較原理が適用できる単独方程式の場合を除いて，その詳しい機構はわかっていない．一つの有用な見方は臨界安定性仮説というものである．これは解の族があるとき，その安定性が変わるところの解が選択されるという判定法であり，もともと結晶成長における解の選択原理として登場したものである．この見方の利点はより広いクラスの問題に適用可能である点である．しかし，ダイナミクスの観点からなぜそれが選ばれるのかという疑問はまだ解決されていない．

第4章では，反応拡散系のパターンダイナミクスを考える．一般に反応拡散系とよばれている方程式は多岐にわたり，それが記述する現象もさまざまである．そこで最初に簡単な分類を行い，基本的と思われる非線形性に限定して，そのダイナミクスを論じる．勾配系は最も基本的なものであり，無限次元力学系の発展においても重要な役割を果たした．その最終状態はあるエネルギー関数の減少とともに定常解に収束するが，非局所項が入るとその行き先は一般に極めて複雑となり多谷構造もとり得ることを示す．

後半ではパターン形成理論の先鞭をつけたTuring不安定性と興奮系の渦巻波について考える．拡散によって不安定化を起こすという単純かつ天才的アイデアは近年になって実験的にも検証され，多くの新しいダイナミクスの生成源となっている．BZ反応で現れる渦巻波は散逸系における時空パターンの代表的なものであり，また界面ダイナミクスが有効に働く典型例でもある．その運動がどのような方程式で記述されるかは接合漸近展開法によって少なくとも形式的に知ることができる．また第3章で述べた選択問題がここでも現れる．すなわちどのような形状と角速度が選ばれるかである．これにはその情報を失わない範囲でできるだけ縮約したモデルを導く必要があり，その際，第5章で述べる特異均衡スケーリングとよばれるものが重要な役割を果たす．

第5章は，近年その発達が著しい特異極限法を概観する．すでに述べた界面ダイナミクスや接合漸近展開法はその一部である．特異極限法が有用となるのはそれが幾何学的であり，われわれがパターンの運動を考える際に，その縁あるいは境目をもって認識するという基本的なことに関わるからと思わ

れる．超曲面が平均曲率によって駆動される運動は数学的には粘性解によって特異点をこえて時間大域的に構成される．さらにそれが単独双安定反応拡散方程式の特異極限となっていることも厳密に示すことができる．第4章で述べた方程式に対してもその特異極限をとることにより，さまざまな界面方程式に帰着することができ，それにより何が本質的に界面を駆動しているかを論ずることができる．また，活性・抑制型反応拡散系の特異極限にともなうスペクトルの漸近的特徴づけを与えるSLEP法についても述べる．

第6章は，これまでの章とは趣を異にする．むしろ第5章までに述べたアプローチでは見落とされていた側面に光をあてる．すなわち遷移的なもの，あるいは「うつろひゆく」ダイナミクスを見直す．最初に述べたように，何が遷移的で何が漸近的であるかは見る立場のスケールによって変わってくる相対的なものである．この章で考える自己複製パターンは正にその典型的なものである．それは最終状態にたどり着くまでの過程で現れるものであり，また複製過程の前後ではあたかも真の定常解や周期解のように振舞う(極限点の余韻)．何がこの過程を駆動しているかは固定されたパラメータでの相空間を眺めてみてもよくわからない．パラメータも変化させて得られる大域的な分岐構造を見て始めてその機構が明らかになる(極限点の階層構造)．

一般に複数のスケールが共存し，一つのスケールから別のそれへと変化する所で必ず遷移的なものが出現するといえる．その意味では遷移過程が最も生き生きとしたダイナミクスを与えるともいえる．実際，最終的に落ち着く先の解が消滅したり，不安定化したりすると自己複製と自己崩壊を永遠に繰り返すダイナミクスが現れる．これを理解する上でも大域的な分岐構造はヒントを与えてくれると考えられる．

目　次

1 スケールの分離と統合 古典的摂動論再考

天体力学における永年項の問題は時間方向の素朴な摂動展開が破綻する典型例であり，その補正のために変形座標法(strained coordinate method)，多重時間尺度法などさまざまな技法が開発されてきた．しかし，それらは職人芸的であり，問題依存的であった．一方，流体力学では 1905 年に L. Prandtl による境界層の発見とその解析が始まり，これが空間方向にスケールが異なるものが共存する最初の例となった．この章ではこれらが共に，異なる時空スケールの共存による収束の非一様性に起因する現象であり，とりわけ遅い自由度とよばれるものに適した座標系を導入することにより長時間にわたる挙動は自然に捉えられることを見る．

§1.1　永年項型

(a)　多重時間尺度法

非線形バネの運動を記述する次の Duffing 方程式を考えよう．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+\epsilon x^3=0, \quad t>0 \tag{1.1}$$

$$x(0)=\alpha, \quad \frac{dx}{dt}(0)=0 \tag{1.2}$$

ここで x は基準点からの変位を表し，ϵ は十分小さな正数である．$\epsilon=0$ であ

ればよく知られた調和振動の方程式に帰着する．非線形項 ϵx^3 は低階の項ゆえ，**正則摂動**(regular perturbation)の問題として解 $x(t)$ を ϵ のベキ展開で求めることが可能であろう．

$$x(t) \sim x_0(t)+\epsilon x_1(t)+\cdots+\epsilon^n x_n(t)+\cdots \tag{1.3}$$

実際(1.3)を(1.1)へ代入して，ϵ のベキで整頓して最初の2項を求めると

$$x(t) = \alpha\cos t+\epsilon\left\{-\frac{3}{8}\alpha^3 t\sin t+\frac{\alpha^3}{32}(\cos 3t-\cos t)\right\}+O(\epsilon^2) \tag{1.4}$$

となる．有限な $T>0$ に対しては，(1.4)は $[0,T]$ で一様な展開であることが確かめられる．しかし，t の全区間 $[0,\infty)$ における近似とはなり得ない．なぜなら，第2項の $-\frac{3}{8}\alpha^3 t\sin t$ が振動しつつ発散するからである((1.1)の解は両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけて積分すればわかるように有界にとどまる)．すでに $t=O(1/\epsilon)$ のとき第2項は $O(\epsilon)$ ではない．このような正則摂動展開を破綻に導く $-\frac{3}{8}\alpha^3 t\sin t$ は**永年項**(secular term)とよばれる．そのために(1.1)のようなタイプの問題を**永年項型問題**(cumulative type problem)という．また(1.1)は微分の最高階が摂動として加わった形ではないが**特異摂動問題**(singular perturbation problem)として取り扱われるべきである．それは $[0,\infty)$ で一様に有効な正則摂動展開は存在しないからである．

この困難を取り除くために，さまざまな手法が工夫されてきた．その1つとして変形座標(strained coodinate)を用いる方法がある．独立変数を t から τ に

$$t = (1+\epsilon\omega_1+\epsilon^2\omega_2+\cdots)\tau \tag{1.5}$$

と変換する．ここで $\omega_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ は後に永年項を取り除くことができるように決める未定係数である．しばらくは

$$1+\epsilon\omega_1+\epsilon^2\omega_2+\cdots \tag{1.6}$$

が収束すると仮定して話を進める．(1.5)を用いて(1.1)を書き換えると

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+(1+\epsilon\omega_1+\epsilon^2\omega_2+\cdots)^2(x+\epsilon x^3) = 0, \quad \tau>0 \tag{1.7}$$

$$x(0) = \alpha, \quad \frac{dx}{d\tau}(0) = 0 \tag{1.8}$$

となる．$x(\tau)$ を

(1.9)
$$x(\tau)=x_0(\tau)+\epsilon x_1(\tau)+\epsilon^2 x_2(\tau)+\cdots$$

と展開して(1.7)へ代入し，ϵ のベキで整理すると逐次的に線形の初期値問題が得られる．最初の2つを書き出せば

(1.10) $O(1)$:
$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2}+x_0=0, \qquad x_0(0)=\alpha, \quad \frac{dx_0}{d\tau}(0)=0$$

(1.11) $O(\epsilon)$:
$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-(x_0^3+2\omega_1 x_0), \quad x_1(0)=0, \quad \frac{dx_1}{d\tau}(0)=0$$

となる．(1.10)を解けば次を得る．

(1.12)
$$x_0(\tau)=\alpha\cos\tau$$

これを(1.11)に代入すると

(1.13)
$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1&=-\alpha^3(\cos\tau)^3-2\alpha\omega_1\cos\tau\\&=-\alpha\left(\frac{3}{4}\alpha^2+2\omega_1\right)\cos\tau-\frac{\alpha^3}{4}\cos 3\tau\end{aligned}$$

となる．右辺第1項は左辺の調和振動子の解であり，それが永年項を引き起こすので，これを取り除くために

(1.14)
$$\omega_1=-\frac{3}{8}\alpha^2$$

ととる．これにより(1.13)および(1.11)の初期条件をみたす x_1 は

(1.15)
$$x_1(\tau)=\frac{\alpha^3}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)$$

となる．これにより $O(\epsilon)$ までの展開は

(1.16)
$$x(\tau)=\alpha\cos\tau+\epsilon\frac{\alpha^3}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)+O(\epsilon^2)$$

となる．ここで $\tau=\left(1-\frac{3}{8}\alpha^2\epsilon+\cdots\right)^{-1}t$ であるから，(1.16)の右辺第1項をもとの t でかくと

(1.17)
$$x(t)=\alpha\cos\left\{\left(1+\frac{3}{8}\alpha^2\epsilon\right)t\right\}+O(\epsilon)$$

となる．右辺に2つの時間スケール t と ϵt が現れていることに注意しよう．t は速い時間(fast time)，ϵt は遅い時間(slow time)とよばれる．この変形座標法を含めて，一般に複数の異なる時間スケールの存在を積極的に利用する摂動法を**多重時間尺度法**(method of multiple scales)とよび，これにより(1.17)は誤差評価を込めて $0 \leqq t \leqq \dfrac{T}{\epsilon}$ (T は ϵ に依存しない定数)の範囲で一様に有効な近似であることがたしかめられる．しかし，上の求め方は次のような点で不満が残る．

(i)　ad hoc 性

なぜ(1.5)のような変換が有効であるのか，方程式(1.1)から直ちにはわからない．

(ii)　収束性

(1.6)が収束するかどうか，前もってわからない．

(iii)　幾何学的でない

変換(1.5)がどのような幾何学的意味をもつか，明らかではない．

次項でこれらを少なくとも部分的に解消するため，遅い自由度に着目し，問題を捉え直そう．

(b)　平均化法

まず(1.1)の遅い自由度とは何であろうか．それは(1.1)の $\epsilon = 0$ とした線形作用素の **0-固有値**に対応する固有空間のことである．$L \equiv \dfrac{d^2}{dx^2} + 1$ とすれば $\epsilon = 0$ のとき(1.1)は

$$Lx_0 = 0 \tag{1.18}$$

となり，L は r, θ を任意パラメータとして

$$x_0 = re^{i(x+\theta)} \tag{1.19}$$

がその0-固有空間を張る．ここで (r, θ) が遅い自由度とよばれているのは次の理由による．$\epsilon = 0$ のとき初期条件より (r, θ) の値が決まり，それらは時間と共に変化しない．したがって，$\epsilon \neq 0$ $(0 < \epsilon \ll 1)$ のときも ϵ に応じたゆっくりとした速度でしか変化しないであろう．実際，この遅い空間に適した極座標 (r, θ) を用いて(1.1)を書き直すと

$$
(1.20) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \epsilon(r\cos(t+\theta))^3\sin(t+\theta) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\epsilon}{r}(r\cos(t+\theta))^3\cos(t+\theta) \end{cases}
$$

となる．r が有界にとどまり 0 へも行かないとすれば，r と θ は $O(\epsilon)$ でゆっくり変化することがわかる．ただ，この位相–振幅変換(phase-amplitude transformation)により，(1.20)は(1.1)と比べてより複雑になり，かつ陽に t-依存しているので取り扱いは前より難しくなったように見える．しかし一方，(1.20)の右辺は 2π-周期関数であり，(r,θ) はゆっくり変化するとすれば (r,θ) を 1-周期 2π の間，あまり変化しないと考えて平均化したベクトル場は良い近似を与えると考えられる．実際，(1.20)の右辺の平均をとると

$$
(1.21) \qquad \begin{pmatrix} \epsilon\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(r\cos(t+\theta))^3\sin(t+\theta)dt \\ \dfrac{\epsilon}{r}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(r\cos(t+\theta))^3\cos(t+\theta)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{8}\epsilon r^2 \end{pmatrix}
$$

となり t に依存しない単純な形となる．この右辺で定義される次の自律系方程式

$$
(1.22) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar{r}}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\bar{\theta}}{dt} = \dfrac{3}{8}\epsilon r^2 \end{cases}
$$

は**平均化方程式**(averaged equation)とよばれ，その解は長時間にわたり良い近似を与えると予想される．実際，(1.22)は

$$
x_0(t) = \alpha\cos\left\{\left(1+\frac{3}{8}\epsilon\alpha^2\right)t\right\}
$$

を与え，これは(1.17)と一致する．一般に次の定理が成り立つ．

定理 1.1（**平均化法**[175]）　$x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ次の初期値問題の解とする．

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \tag{1.23}$$

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon f_0(y), \qquad y(0) = x_0 \tag{1.24}$$

f は $G=[0,\infty)\times D$（D は閉連結領域）で十分滑らかとし，かつ t について周期 T をもつとする．x_0 は D の内部の点である．f_0 は f の**平均**，すなわち

$$f_0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt \tag{1.25}$$

とする．この積分は y を t に無関係な定数とみなして実行する．このとき ϵ に無関係な内部領域 $\tilde{D}\subset D$ が存在して，$\tilde{D}$ において

$$|x(t)-y(t)| \leqq C\epsilon \tag{1.26}$$

が $0\leqq t\leqq C/\epsilon$ の範囲で成り立つ．ここで C は ϵ に無関係な正定数である．すなわち，平均化方程式の解は区間 $O(1/\epsilon)$ の範囲で一様な $O(\epsilon)$-近似を与える．

［証明］　時間スケールを $\tau=\epsilon t$ ととりかえ，$M=\max_G |f(t,x)|$ とおけば常微分方程式の一般論より，$0\leqq t\leqq \dfrac{C}{M\epsilon}$ の範囲で一意に解 $x(t)$ は存在する．f_0 の定義より $\max_G |f(t,x)|$ は M 以下なので，y についても同様の結果がいえる．必要ならば定数 C を取り替えることにより y は ϵ に依存しない D のある内部領域 $\tilde{D}$ にとどまるとしてよい．以下では直接 $|x(t)-y(t)|$ の誤差評価をやらずに，近似度を1段上げた解を通して評価を行う．(1.23)の右辺を周期 T にわたる平均をそれからのズレという形にかきかえると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \epsilon\left\{\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt + \left(f(t,x)-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt\right)\right\} \\ &= \epsilon f_0(x)+\epsilon(f(t,x)-f_0(x))\end{aligned} \tag{1.27}$$

となる．平均部分は y がよく近似していると考えられるが，第2項のズレに相当する部分は y に組み込まれていない．そこで(1.27)の両辺を t で積分した形

$$x(t)-x_0 = \epsilon\int_0^t f_0(x)d\tau + \epsilon\int_0^t \{f(\tau,x)-f_0(x)\}d\tau \tag{1.28}$$

において，右辺第2項の x を y で置き換えたものを y に付加した次の近似解 w を考える．

(1.29)
$$w(t) = y(t)+\epsilon u(t,y)$$

(1.30)
$$u(t,y) \equiv \int_0^t \{f(\tau,y)-f_0(y)\}d\tau$$

u は T-周期関数であり，$|u(t,y)| \leqq 2MT$ であることに注意しよう．この w と解 x の誤差評価を行う．

(1.31)
$$x(t)-w(t) = \int_0^t \left(\frac{dx}{dt}-\frac{dw}{dt}\right)dt$$

ここで

(1.32)
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}-\frac{dw}{dt} &= \epsilon f(t,x)-\epsilon f_0(y)-\epsilon\nabla u\cdot\frac{dy}{dt}-\epsilon\frac{\partial u}{\partial t}\\ &= \epsilon\{f(t,x)-f(t,y)\}-\epsilon^2\nabla u\cdot f_0(y)\\ &= \epsilon\{f(t,x)-f(t,w)\}+\epsilon\{f(t,w)-f(t,y)\}-\epsilon^2\nabla u f_0(y)\end{aligned}$$

である．また，(1.30)，f の滑らかさ，$u, \nabla u$ の有界性より

(1.33)
$$\left|\frac{dx}{dt}-\frac{dw}{dt}\right| \leqq \epsilon L|x-w|+C\epsilon^2$$

となる．ここで L は f の Lipschitz 定数である．(1.33)を(1.31)に代入して

(1.34)
$$|x(t)-w(t)| \leqq \epsilon L\int_0^t |x(t)-w(t)|dt+C\epsilon^2 t$$

を得る．これを

(1.35)
$$|x(t)-w(t)|+\frac{C\epsilon}{L} \leqq \epsilon L\int_0^t\left\{|x(t)-w(t)|+\frac{C\epsilon}{L}\right\}dt+\frac{C\epsilon}{L}$$

とかきかえ，Gronwall の補題を適用すると

(1.36)
$$|x(t)-w(t)|+\frac{C\epsilon}{L} \leqq \frac{C\epsilon}{L}\exp(\epsilon Lt)$$

を得る．この右辺の形および(1.29)を用いれば，直ちに定理の結論が導かれる． ∎

定理 1.1 より，Duffing 方程式(1.1)の場合には，平均化方程式(1.22)の解 $\alpha\cos\left\{\left(1+\frac{3}{8}\epsilon\alpha^2\right)t\right\}$ が $O(1/\epsilon)$ の時間幅で一様な $O(\epsilon)$-近似を与えることがわかる．ゆっくりとした自由度は(1.1)の場合 2 次元あり，(1.22)のように位相 θ の変化として現れた．

振幅 r の変化として現れる例として次の **van der Pol 方程式**がある．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\epsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} \tag{1.37}$$

$\epsilon=0$ のとき Duffing 方程式と同様になり，したがって位相–振幅変換を行い極座標表示を行えば，解 $x(t)$ は

$$x(t)=\overline{a}(t)\cos(t+\overline{\theta}(t))+O(\epsilon)$$

の近似が $0\leqq t\leqq\frac{t_1}{\epsilon}$ の範囲で一様に成り立つことが期待される．ここで $(\overline{a},\overline{\theta})$ は次の平均化方程式の解である．

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{a}}{dt}=\dfrac{\epsilon\overline{a}}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\overline{a}^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi d\varphi=\dfrac{\epsilon\overline{a}}{2}\left(1-\dfrac{\overline{a}^2}{4}\right) \\ \dfrac{d\overline{\theta}}{dt}=\dfrac{\epsilon}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\overline{a}^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi=0 \end{cases} \tag{1.38}$$

これを解けば次を得る．

$$\overline{a}^2=\frac{4}{1-Ae^{-\epsilon t}},\quad \overline{\theta}=\theta_0$$

定数 A,θ_0 は初期値に応じて決まる．よって定理 1.1 より

$$x(t)=\frac{2}{\sqrt{1-Ae^{-\epsilon t}}}\cos(t+\theta_0)+O(\epsilon) \tag{1.39}$$

が $0\leqq t<\frac{t_1}{\epsilon}$ の範囲で一様に成り立つ．とくに初期条件が $x(0)=\alpha\,(>0)$, $dx(0)/dt=0$ で与えられるとき

$$A=1-\frac{4}{\alpha^2},\quad \theta_0=0 \tag{1.40}$$

となる．かくして α の大きさに応じて振幅 $\overline{a}$ はゆっくりした時間スケール ϵt で減少あるいは増大していく．この変化はむろん，非線形摩擦項に由来するものである．

§1.2　遷移層型

(a)　遷移層とは

前節においては，摂動パラメータ ϵ に応じて十分長い時間幅 $O(1/\epsilon)$ で一様な近似を得るためには，遅い時間スケール $\tau=\epsilon t$ を導入する必要があった．そのとき自然な座標系としては，調和振動子の作用素の 0-固有空間((1.18)参照)を張る 2 次元極座標であった．

複数のスケールが必要となるもう一つの古典的な特異摂動の例として**遷移層型問題**(layer type problem)がある．とくに Prandtl によって提起された流体力学における**境界層問題**が有名である．近年パターン形成や自由境界問題において注目されている**内部遷移層**(interior transition layer)もある量が空間的に非常に狭い範囲で大きく変化する場所をもつ例となっている．

そこではあるパラメータが 0 へ近づくとき，空間的に急激に変化するスケールとそうでないスケールが共存し，解は遷移層の厚みが 0 となる極限において特異性(不連続性)をもつ．そのような遷移層解の存在や安定性を論ずるとき(1.18)に対応する遅い空間が自然に現れる．それは内部遷移層の平行移動の自由度にほぼ対応するものとなっている．次の単純な関数においてすでに遷移層型のスケールの分離と統合を見ることができる．

$$u(x,\epsilon)=e^{-x/\epsilon}+x+\epsilon,\quad 0\leqq x\leqq 1 \tag{1.41}$$

任意の $x\,(\neq 0)$ を固定して極限 $\epsilon\to 0$ をとると(外部極限)，

$$f(x)=x \tag{1.42}$$

を得る．この $f(x)$ は u の $0<x_0\leqq x\leqq 1$ における $O(\epsilon)$ の近似になっている．ここで x_0 は固定された任意の正の数である．しかし，この近似は $x=0$ を含む区間上では一様近似にはなっていない．それはグラフ(図 1.1 参照)を描けば，すぐわかるように $u(x,\epsilon)$ は $x=0$ で境界層をもつからである．さて次に引き延ばしたスケール $\tilde{x}=x/\epsilon$ を用いて(1.41)を書き直してみよう．

$$\tilde{u}(\tilde{x},\epsilon)=e^{-\tilde{x}}+\epsilon\tilde{x}+\epsilon,\quad 0\leqq\tilde{x}\leqq\frac{1}{\epsilon} \tag{1.43}$$

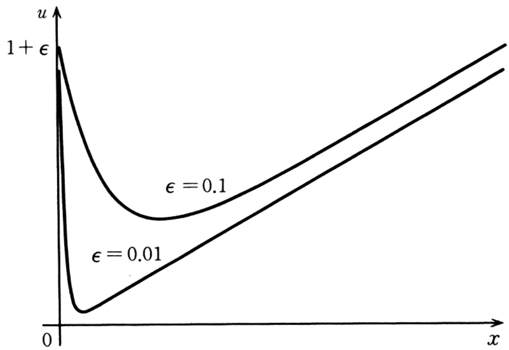


図 1.1 遷移層に現れる 2 つのスケールの共存

$\tilde{x}$ を固定し，極限(内部極限)をとると，次を得る．

(1.44) $$\tilde{g}(\tilde{x}) = e^{-\tilde{x}}$$

$\tilde{x}_0$ を任意正数とするとき，これは $0 \leqq \tilde{x} \leqq \tilde{x}_0$ で $\tilde{u}$ の一様近似になっている．しかし引き延ばされた全領域 $0 \leqq \tilde{x} \leqq 1/\epsilon$ の一様近似にはなっていない．実際 $\tilde{x}$ が $O(1/\epsilon)$ となると，$\epsilon\tilde{x}$ は $O(1)$ となり無視できなくなる．このように外部極限，内部極限，おのおの単独では全区間における一様近似とはならない．しかし，これらを合せたもの $f(x)+\tilde{g}\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) = x+e^{-x/\epsilon}$ は全区間での一様近似を与える．複数の空間スケールが共存するとき，それらを分離し(外部問題と内部問題)，次に統合して全領域での一様近似解を構成するという手法は，接合漸近展開法をはじめ特異摂動論において普遍的に見られるものである．

(b) 双安定系における内部遷移層

具体的な微分方程式において，どのように遷移層が現れるか調べよう．次の放物型方程式を考える．

(1.45) $$u_t = \epsilon^2 u_{xx} + f(u,x), \quad -1 < x < 1, \quad t \geqq 0$$

ϵ は十分小さい正の数とする．境界条件としては Neumann 条件

(1.46) $$u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0$$

を採用する．非線形項 f は

(1.47)
$$f(u,x)=u(1-u)(u-a(x))$$

とする．ここで $a(x)$ は滑らかな関数で

(1.48)
$$a(0)=\frac{1}{2},\quad a_x(0)\neq 0,\quad 0<a(x)<1,\quad x\in[-1,1]$$

をみたすとする．$a(x)$ は典型的には $x=0$ で $1/2$ を通る狭義単調関数を思えばよい．(1.47)は**双安定型**(bistable)とよばれる．それは x を任意に固定したとき，$\epsilon=0$ とした常微分方程式は 0 および 1 の安定平衡点をもち初期値が $a(x)$ より大きいか小さいかにより，1 または 0 のどちらかの安定平衡点に漸近することに由来する．$a(x)$ はセパラトリクスの役割をしている．

注意 1.2　$J(x)\equiv\int_0^1 f(u,x)du$ と定義すると(1.48)より

(1.49)
$$J(0)=0,\quad \frac{d}{dx}J(x)|_{x=0}\neq 0$$

をみたす．

以下では単独の遷移層を有する場合のみについて考える．(1.45) の解の存在や安定性を示すには比較定理を用いる方法，接合漸近展開法など多様であるが，ここでは Hale–坂元[119]にならう．それは Lyapunov–Schmidt 法を採用していることで，この問題における遅い自由度がより明確に現れるからである．

定理 1.3　ある $\epsilon_0>0$ と 2 種類の単独遷移層をもつ(1.45)の定常解 $u_j(x,\epsilon)$, $j=0,1$, $0<\epsilon\leqq\epsilon_0$ が存在し，次の性質をみたす．

(i)　任意の $\delta>0$ に対し

(1.50)
$$\lim_{\epsilon\to 0}u_j(x,\epsilon)=j\qquad [-1,-\delta]\text{ 上一様収束}$$

(1.51)
$$\lim_{\epsilon\to 0}u_j(x,\epsilon)=1-j\qquad [\delta,1]\text{ 上一様収束}$$

(ii)　さらに

(1.52)
$$(-1)^j\frac{d}{dx}u_j(0,\epsilon)\cdot\frac{d}{dx}J(0)>(<)\,0$$

のとき $u_j(x,\epsilon)$ は漸近安定(不安定)である．不安定の場合，その不安定

多様体の次元は1である. □

(I) 近似解の構成

内部遷移層の構成の際，次の2点が問題となる.

(i)　どこに遷移層が現れるのか?

(ii)　遷移層の幅は ϵ にどのように依存するのか?

(i)は，一般的には大域的な自由境界の幾何の問題に関わり，(ii)は，方程式に含まれる各項のバランスに関わる．遷移層は2つの異なる状態をつなぐものであるが，そのためにはまず2つの異なる状態が何であるか決めなければならない．これが**外部問題**(outer problem)とよばれるものであり，特異摂動パラメータを $\epsilon=0$ とおいたもので与えられる．(1.45)の定常問題においては，それは代数方程式

$$f(u,x)=0 \tag{1.53}$$

となる．(1.53)は $u=0,1,a(x)$ という3種類の解をもつが，どの2つの解を選択するかについては任意性がある．ここでは常微分方程式の意味で局所安定な(実は偏微分方程式(1.45)の意味でもそうである) 0 と 1 を採用し，これらをつなぐ遷移層を考える.

一般に外部問題(1.53)の解は境界条件をみたさない．流体力学における境界層はこのようなギャップを埋めるために生じることが知られている．上の例では，たまたま定数関数を外部解として採用したために Neumann 条件をみたすこととなった.

最初の2つの問題に戻ろう．まず(ii)のスケールの決定から考えよう．今ある場所 $x=x_0$ で遷移層があったとしよう．その幅は $O(\epsilon^\alpha)$ であるとする. $\alpha\,(>0)$ は未知の指数である．遷移層の漸近形を調べるために，**引き延ばし座標**(stretched coodinate)として次の y

$$y=\frac{x-x_0}{\epsilon^\alpha} \tag{1.54}$$

を導入する. $z(y,\epsilon)=u(x_0+\epsilon^\alpha y,\epsilon)$ とかくと，定常問題は

$$\epsilon^{2(1-\alpha)}\ddot{z}+f(z,x_0+\epsilon^\alpha y)=0 \tag{1.55}$$

$$\dot{z}\left(\frac{\pm 1-x_0}{\epsilon^\alpha},\epsilon\right)=0 \tag{1.56}$$

となる．ここで $\cdot=\dfrac{d}{dy}$ である．

遷移層は 0 と 1 をつなぐものを考えているから，(1.55)が $\epsilon\to 0$ の極限において 0 と 1 をつなぐ有界で滑らかな解をもつように指数 α と場所 x_0 は決定されなければならない．$\alpha\neq 1$ とすると(1.55)の左辺の第 1 項もしくは第 2 項のいずれかしか極限においては残らない．しかし，そのどちらも x_0 の選び方にかかわらず，われわれの要請をみたすものではない．したがって $\alpha=1$ のみが候補となる．このように極限においてバランスして残る項と指数 α は密接に関連している．(1.55)においては 2 つの項しかないので指数は唯一つに決まったが，一般にはバランスして残す項に応じて指数はさまざまな値をとり得る．おのおのの極限は異なる**特異極限**(distinguished limit)をもつとよばれる．そのような例は第 5 章において再び出会うであろう．

次に遷移層の位置を決定しよう．2 次元相平面解析から明らかとなる次の結果が鍵となる．

命題 1.4　a を定数($0<a<1$)として次の方程式を考える．

$$\ddot{z}+f(z;a)=0$$

ここで，$f(z;a)=z(1-z)(z-a)$ である．このとき，次が成り立つ(図 1.2 参照)．

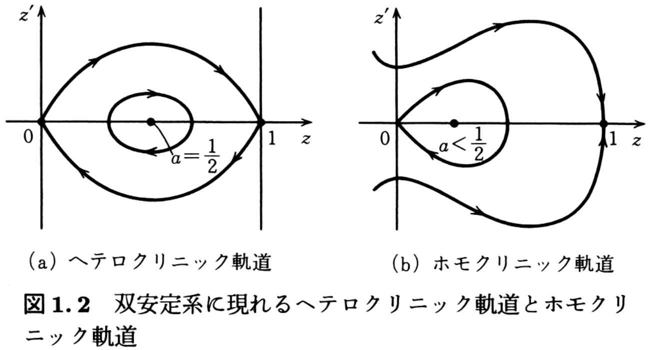


図 1.2　双安定系に現れるヘテロクリニック軌道とホモクリニック軌道

（i）　**ヘテロクリニック軌道**(heteroclinic orbit)

境界条件 $z(-\infty)=0$, $z(+\infty)=1$（あるいは $z(-\infty)=1$, $z(+\infty)=0$）をみたす解が存在するための必要十分条件は $a=\dfrac{1}{2}$ である．この解は，平衡点 0 と 1 を結ぶヘテロクリニック軌道とよばれ，一意的であり，y について単調増大(単調減少)である．

（ii）　**ホモクリニック軌道**(homoclinic orbit)

境界条件 $z(\pm\infty)=0$（あるいは $z(\pm\infty)=1$）をみたす解が存在するための必要十分条件は $0<a<\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$ である．この解は，平衡点 0（あるいは 1）へのホモクリニック軌道とよばれ，a を止めるごとに唯一存在する．　□

注意 1.5　ヘテロクリニック軌道が存在するための必要十分条件は注意 1.2 の J を用いて

$$J(a)=0$$

とかける．実際，これは $a=\dfrac{1}{2}$ のときのみみたされる．

(1.55)において $\alpha=1$ ととり，$\epsilon\to 0$ とした極限問題 $\ddot{z}+f(z,x_0)=0$ において境界条件

$$z(\mp\infty)=0, \quad z(\pm\infty)=1 \tag{1.57}$$

をみたす解が存在するのは(1.48)より $x_0=0$ のときである．これは最初の問題(i)に対する解答を与える．すなわち，引き延ばし座標を導入することによって得られた $\mathbb{R}$ 上の極限問題が 2 つの異なる外部解をつなぐヘテロクリニック軌道をもつような場所が遷移層が存在する点の候補を与える．この事実は普遍的であり，遷移層が現れるさまざまな界面パターンにおいて，この軌道は基本的部品となる(第 4 章参照)．

さて，$\alpha=1$, $x_0=0$ とおくと，定常問題は

$$\ddot{z}+f(z,\epsilon y)=0 \tag{1.58}$$

$$\dot{z}\left(\pm\frac{1}{\epsilon},\epsilon\right)=0 \tag{1.59}$$

となる．遷移層の形を決める**内部解**(inner solution)を次の形で求めよう．

(1.60)
$$z(y,\epsilon)=z_0(y)+\epsilon z_1(y)+O(\epsilon^2)$$

これを(1.58)に代入し，形式的に ϵ の等しいベキを等置すると，0 次と 1 次は次で与えられる．

(1.61)
$$\ddot{z}_0+f(z_0,0)=0$$

(1.62)
$$\ddot{z}_1+f_u(z_0(y),0)z_1+f_x(z_0(y),0)y=0$$

以下では境界条件は次の 0 から 1 へつなぐ遷移層の場合のみ考えることにする．

(1.63)
$$z_0(-\infty)=0,\quad z_0(+\infty)=1$$

(1.64)
$$z_1(\pm\infty)=0$$

すでに述べたように(1.61),(1.63)をみたすヘテロクリニック軌道は平行移動を除いて一意に決まる．原点での値を $z_0(0)=\gamma\,(0<\gamma<1)$ としたときの解を $z_0(y;\gamma)$ と書こう．この段階では γ は決まらないが，次の z_1 を解く際に可解条件より決定される．(1.62)は z_1 についての線形非同次方程式であり，対応する同次方程式

$$\ddot{z}_1+f_u(z_0(y;\gamma),0)z_1=0$$

は(1.61)の両辺を y-微分すればわかるように $\dot{z}_0(y;\gamma)$ を $\mathbb{R}$ 上で有界な解としてもつ．実はそのようなものは $\dot{z}_0(y;\gamma)$ しかないことも確かめられる．このとき(1.62)の解として $\mathbb{R}$ 上有界な解が存在するための必要十分条件は

(1.65)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{z}_0(y;\gamma)f_x(z_0(y;\gamma),0)y\,dy=0$$

がみたされることである(詳しい証明は文献[54]の第 11 章参照)．これは **Fredholm の交代定理**の一例となっている．条件(1.65)が γ を一意に決める．実際

$$\begin{aligned}C_0(\gamma)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{z}_0(y;\gamma)f_x(z_0(y;\gamma),0)y\,dy\\&=\int_0^1 f_x(u,0)\left(\int_\gamma^u[-2F(v)]^{-\frac{1}{2}}dv\right)du\end{aligned}$$

ここで $F(u)=\int_0^u f(s,0)ds$ である．したがって(1.49)より

$$\frac{d}{d\gamma}C_0(\gamma) = -[-2F(\gamma)]^{-\frac{1}{2}}J'(0) \neq 0$$

となり，$C_0(\gamma)$ の単調性がわかる．さらに $\gamma\to 0,1$ のとき $|C_0(\gamma)|\to+\infty$ となるので，(1.65)をみたす $\gamma\in(0,1)$ が一意に存在する．そのように γ をとった $z_0(y;\gamma)$ を以下では $z_0(y)$ とかくことにする．$z_0(y)$ が $y\to\pm\infty$ のとき 0 および 1 へ導関数と共に指数的に漸近するので(1.62)の解 $z_1(y)$ もその導関数と共に 0 へ指数的に近づく．

以上のようにして求めた内部解を

(1.66)
$$Z(y,\epsilon) = z_0(y)+\epsilon z_1(y)$$

とかこう．さていよいよ外部解と内部解を組み合せて，全区間 $[-1,1]$ での近似解を構成しよう．外部解と内部解ではそれぞれ近似解として有効である範囲が異なるので次の C^∞-関数を用意する．

(1.67)
$$\zeta_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqq 1/4 \\ 0, & |x| \geqq 1/2 \end{cases} \quad 0 \leqq \zeta_0(x) \leqq 1$$

(1.68)
$$\zeta_+(x) = \begin{cases} 0, & x\in[-1,0] \\ 1-\zeta_0(x), & x\in[0,1] \end{cases}$$

これらを用いて近似解 $U(x,\epsilon)$ は

(1.69)
$$U(x,\epsilon) = 0+\zeta_0(x)Z\left(\frac{x}{\epsilon},\epsilon\right)+1\cdot\zeta_+(x)$$

で与えられる．

(II) Lyapunov–Schmidt 法と安定性

上で求めた近似解をもとに，どのように遷移解を構成し，またその安定性を調べるか，そのあらすじを述べよう．もとの方程式(1.45)の定常解 u を $u=U(x,\epsilon)+v$ とおき，v を改めて u とかくことにすると，u がみたすべき定常問題の方程式は

(1.70)
$$L^\epsilon u+G(\epsilon)+F(u,\epsilon) = 0$$

となる．ここで

$$L^{\epsilon}u \equiv \epsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}u + f_u(U(x,\epsilon),x)u \tag{1.71}$$

$$G(\epsilon)(x) \equiv \epsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}U(x,\epsilon) + f(U(x,\epsilon),x) \tag{1.72}$$

$$F(u,\epsilon) \equiv f(U(x,\epsilon)+u,x) - f(U(x,\epsilon),x) - f_u(U(x,\epsilon),x)u \tag{1.73}$$

である．L^{ϵ} は近似解 U での線形化作用素であり，F は u について 2 次以上の非線形項である．$G(\epsilon)$ は U の近似の度合いを表す量で，一般に ϵ と共に 0 へ近づく．L^{ϵ} がもし ϵ に無関係に一様に有界な逆をもてば，(1.70)の両辺に $(L^{\epsilon})^{-1}$ を施し，それを逐次近似的に解くことで u を求めることができる．しかし後述するように，L^{ϵ} は ϵ と共に 0 へ近づく固有値 $\lambda_1(\epsilon)=O(\epsilon)$ を(唯一つ)もつので，この方法は適用できない．実は $\lambda_1(\epsilon)$ に対応する L^{ϵ} の固有関数を $\varphi_1(x,\epsilon)$ とすると，この φ_1 で張られる 1 次元空間が遅い自由度に対応する空間となる．内部遷移層の数が一般に n 箇所あれば，この空間の次元も n 次元となる(§5.4 参照)．

Lyapunov–Schmidt 法の核心は，全空間を遅い空間とそれに直交する方向に分解し，直交補空間部分は上に述べた逐次近似で解き，その結果を用いて，もとの問題を**遅い空間上での問題に縮約**することにある．いま未知関数を $u=\alpha\varphi_1+v$ と分解する．α はスカラーであり，$\int_{-1}^{1}\varphi_1(x,\epsilon)v(x)dx=0$，すなわち v は φ_1 に直交する成分である．これを(1.70)に代入し，上の分解に対応する射影を方程式に施すと v についての方程式と φ_1-方向の方程式からなる連立方程式が得られる．v-方向には L^{ϵ} は一様に有界な逆をもつので小さな α,ϵ に対し，v の方程式は $v=v^*(\alpha,\epsilon)$，$v^*(0,0)=0$ と解ける．これを φ_1-方向の方程式へ代入すると (α,ϵ) についての**分岐方程式**(bifurcation equation)とよばれる縮約された式が得られる．

$$\begin{aligned} B(\alpha,\epsilon) = \lambda_1(\epsilon)\alpha + \frac{1}{\|\varphi_1(\epsilon)\|_{L^2}^2}\int_{-1}^{1}\varphi_1(x,\epsilon)[G(\epsilon)(x) \\ + F(\alpha\varphi_1(x,\epsilon)+v^*(\alpha,\epsilon)(x))]dx \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$= 0$$

$U(x,\epsilon)$ が近似解とよばれるためには，真の解とのズレ u が $\epsilon\to 0$ のときなくなるもの，すなわち

(1.75)
$$\alpha = \alpha^*(\epsilon), \quad \alpha^*(0) = 0$$

であるような(1.74)の零点を見つけることが目標となる．ここで，近似解 $U(x,\epsilon)$ の近似の度合い $G(\epsilon)$ が問題となる．もし $G(\epsilon)$ が $O(\epsilon)$ 程度であれば $v^* = O(\alpha^2+\epsilon)$ となり $\lambda_1(\epsilon) = O(\epsilon)$ なので，(1.74)を見ると $\alpha^*(0)=0$ をみたす解をみつけることは困難となる．そこで，$U(x,\epsilon)$ としては少なくとも $G(\epsilon) = O(\epsilon^2)$ となる程度には作る必要がある．そのような U に対しては，(1.75)をみたすものが構成される．上で内部解を $O(\epsilon)$ の z_1 まで構成したのはこの理由による．

解の安定性については上で構成した解での線形化スペクトルの挙動を調べることにより判定できる．ここでは，(1.52)の直観的な意味を述べよう．簡単のために，$a(x)$ は，狭義単調増大としよう．したがって，$\dfrac{d}{dx}J(0) < 0$ となる．このとき，x を止めるごとの常微分方程式の 1 と 0 の吸引領域(basin of attraction)の広さは (0,1) 区間で見て $x<0$ では 1 が広く，$x>0$ では 0 の方が広い．したがって，$x<0$ で 1 をとり，$x>0$ で 0 をとる $u_1(x,\epsilon)$ は安定であり，その逆の $u_0(x,\epsilon)$ は不安定であろうと予想される．実際，(1.52)の符号を見ると，そのようになっている．

さて，近似解(1.69)は次の意味で $O(\epsilon^2)$ の誤差を除いて定常問題の解である．

補題 1.6

(1.76)
$$\sup_{x\in[-1,1]} |G(\epsilon)(x)| = O(\epsilon^2), \quad \epsilon \to 0$$

[証明]　z_0, z_1 を引き延ばし座標で見て，遠方で 2 階導関数まで込めて指数的に減衰することを考慮すれば直接確かめられる．∎

Lyapunov–Schmidt 法とは L^ϵ の固有値の振舞いによって空間を正則部分と非正則部分に分け，正則部分は畳み込んで自由度が縮約された非正則部分空間上の問題(これが遅い自由度に対応)に帰着することである．非正則部分

に対応する固有値は ϵ と共に原点(一般的には虚軸)に近づくものであり，次の命題で与えられる．ここで $L^\epsilon: X\to Y$ は次の空間上で考える．

$$X=\left\{u\in C^2[-1,1]\,\middle|\,\frac{du}{dx}(\pm 1)=0\right\},$$
$$Y=C^0[-1,1]$$

X 上のノルムは $|u|_{2,\epsilon}=|u|_0+\epsilon\left|\dfrac{du}{dx}\right|_0+\epsilon^2\left|\dfrac{d^2u}{dx^2}\right|_0$ を採用する．求める近似解 $U(x,\epsilon)$ は，その定義(1.69)から明らかに X に属している．

命題 1.7 ある $\epsilon_0>0$ が存在して次が成り立つ．

(i) L^ϵ の主線形固有値(principal eigenvalue) $\lambda_1(\epsilon)$ は実数かつ単純であり，$\epsilon\to 0$ のとき，次のように 0 に近づく．

$$\lambda_1(\epsilon)=K_1\epsilon+o(\epsilon),\quad 0<\epsilon\leqq\epsilon_0$$

ここで $K_1=-J'(0)\Big/\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dot{z}_0(t)^2dt$ である．

(ii) $\lambda_1(\epsilon)$ に対応する主線形固有関数を $\phi_1(x,\epsilon)$ $(0<\epsilon\leqq\epsilon_0)$ とするとそれは指数的に減衰する．すなわち，ある正定数 C_1, C_2 が存在して

$$|\phi(x,\epsilon)|\leqq C_1|\phi_1(0,\epsilon)|\exp\left(-\frac{C_2}{\epsilon}|x|\right),\quad |x|\leqq 1$$

が成り立つ．

(iii) $\lambda_1(\epsilon)$ 以外のすべての固有値は ϵ に関して一様に真に負の範囲にとどまる．

[証明のアイデア] 詳細は[119]に譲るとして，ここではなぜそのような固有値が出現するかをわかりやすく説明する．まず ϵ と共に 0 へ収束する実固有値は内部遷移層の主要部 $z_0(y)$ ((1.61)を見よ)を見ればその出自がわかる．実際 L^ϵ を引き延ばし座標 y で書いた後，形式的に $\epsilon\to 0$ とすると

$$\tilde{L}^0\tilde{z}\equiv\ddot{\tilde{z}}+f_u(z_0(y),0)\tilde{z}\tag{1.77}$$

となるが，z_0 がみたす方程式(1.61)を y で微分すると $\dot{z}_0$ は方程式

$$\ddot{\tilde{z}}+f_u(z_0(y),0)\tilde{z}=0\tag{1.78}$$

をみたす．すなわち $\dot{z}_0$ は $\tilde{L}^0$ の 0-固有値に対応する固有関数となっており，

しかも正値であるので，実はこの0–固有値は $\tilde{L}^0$ の実単純な主線形固有値になっている．十分小さい $\epsilon>0$ に対して，これは L^ϵ のある固有値に引き継がれるが，それが $\lambda_1(\epsilon)$ である．(ii)の遠方での指数減衰，および(iii)の他の固有値が $\lambda_1(\epsilon)$ から一様に離れていることも0-固有値が単純な主線形固有値であることから導かれる．(1.61)の解 $z_0(y)$ の平行移動したものは再び(1.61)の解であり，したがってその線形固有値問題は0-固有値をもった．その固有関数 $\dot{z}_0$ をもとの遷移層解に加えることは遷移層解の平行移動にほぼ対応する．この意味で，L^ϵ が原点付近に $O(\epsilon)$ の固有値をもつことは内部問題の形式極限が平行移動不変性をもつことに起因しているといってよい．λ_1 が $K_1\epsilon$ のように $\epsilon\to 0$ で振る舞うことはまず U_x が次をみたすことに注意する．

$$\epsilon^2\frac{d^2}{dx^2}U_x+f_u(U,x)U_x+f_x(U,x)=O(\epsilon^2) \tag{1.79}$$

一方，(λ_1,ϕ_1) は定義より次をみたす．

$$\epsilon^2(\phi_1)_{xx}+f_u(U(x,\epsilon),x)\phi_1=\lambda_1\phi_1 \tag{1.80}$$

この両辺と U_x との L^2-内積をとり，部分積分を行い(1.79)を用いると

$$-\langle f_x(U,x),\phi_1\rangle=\lambda_1\langle\phi_1,U_x\rangle \tag{1.81}$$

を得る．$\|\phi_1\|_{L^2(-1,1)}=1$ であることより引き延ばし座標 y の任意有限区間上で

$$\sqrt{\epsilon}\,\phi_1(\epsilon y)\sim\dot{z}_0(y) \tag{1.82}$$

$$\epsilon U_x(\epsilon y,\epsilon)\sim\dot{z}_0(y) \tag{1.83}$$

となる．注意1.2およびこれらを用いて(1.81)を整理すると $\lambda_1(\epsilon)$ の主要部 $K_1\epsilon$ が導き出せる．∎

以上の準備の下に(1.70)にLyapunov–Schmidt分解を適用し，定理1.3で述べた解の存在およびその安定性を証明しよう．

まず命題1.7で与えられた L^ϵ の固有値の特徴づけをもとに問題(1.70)を主線形固有関数 ϕ_1 方向とその直交方向に分解する(Lyapunov–Schmidt分解)．ϕ_1 を $\phi_1(0,\epsilon)=\dot{z}_0(0)$ と正規化し，その上への正射影 $E\colon Y\to Y$ を

$$Eu = \langle u, \phi_1(\,\cdot\,,\epsilon)\rangle \frac{\phi_1(\,\cdot\,,\epsilon)}{\|\phi_1(\,\cdot\,,\epsilon)\|^2_{L^2(-1,1)}} \tag{1.84}$$

で定義する．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $L^2(-1,1)$ での内積である．これに応じて X, Y の直交分解

$$X = \mathrm{span}\{\phi_1\} \oplus X_1, \quad Y = \mathrm{span}\{\phi_1\} \oplus Y_1 \tag{1.85}$$

ができる．X_1, Y_1 はそれぞれ X, Y における E の核空間であるが，同時に $Y_1 = \mathcal{R}(L^\epsilon) = L^\epsilon X_1$ であり，$L^\epsilon \colon X_1 \to Y_1$ は 1 対 1 上への写像となる．さて $u = \alpha\phi_1(x,\epsilon) + v\ (\alpha \in \mathbb{R},\ v \in X_1)$ とかくと式(1.70)は次と同値である．

$$\begin{cases} L^\epsilon v + (I-E)\{G(\epsilon) + F(\alpha\phi_1(\epsilon) + v, \epsilon)\} = 0 \\ \alpha\lambda_1(\epsilon)\phi_1(\epsilon) + E\{G(\epsilon) + F(\alpha\phi_1(\epsilon) + v, \epsilon)\} = 0 \end{cases} \tag{1.86}$$

$L^\epsilon \colon X_1 \to Y_1$ は 1 対 1 上への写像であることに注意すれば $L^\epsilon v = p\ (p \in Y_1)$ は一意に解け，さらにその解 $v = v(p)$ は

$$|v(p)|_{2,\epsilon} \leqq C|p|_0 \tag{1.87}$$

をみたす．ここで $C > 0$ は $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ に無関係な定数である．(1.86)の第 1 式にこの結果を適用すると次の補題を得る．

補題 1.8　方程式(1.86)の第 1 式は $(\alpha,\epsilon) = (0,0)$ の近傍で $(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ について一意的に $v = v^*(\alpha,\epsilon)$ と解くことができ，α については滑らかに依存する．さらに $|\alpha| + \epsilon \to 0$ のとき $|v^*(\alpha,\epsilon)|_{2,\epsilon} = O(\alpha^2 + \epsilon^2)$ をみたす．　□

この結果を(1.86)の第 2 式へ代入することにより

$$\lambda_1(\epsilon)\alpha\phi_1(\epsilon) + E\{G(\epsilon) + F(\alpha\phi_1(\epsilon) + v^*(\alpha,\epsilon), \epsilon)\} = 0 \tag{1.88}$$

となるが，$\phi_1(\epsilon)$ との L^2-内積をとり，さらに補題 1.6 および 1.8 を用いれば，これは次の関数 $B(\alpha,\epsilon)$ の零点を見つけることと同値である．

$$B(\alpha,\epsilon) = K_1\epsilon\alpha + \tau_0\alpha^2 + \text{h.o.t.}(\text{高次項}) \tag{1.89}$$

ここで τ_0 は非線形項から決まるある定数である．

陰関数定理を用いると，$B(\alpha,\epsilon)$ の $|\alpha| < c_0,\ \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ における一意的な解 $\alpha = \alpha^*(\epsilon)$

$$\alpha^*(\epsilon) = -\frac{\tau_0}{K_1}\epsilon + o(\epsilon), \quad \epsilon \to 0 \tag{1.90}$$

の存在がいえる．これより定理 1.3 の定常解の族 u_0 は $u_0(x,\epsilon)=\alpha^*(\epsilon)\phi_1(\epsilon)+v^*(\alpha^*(\epsilon),\epsilon)$ で与えられる．近似解 U の定義，$|\alpha^*(\epsilon)|=O(\epsilon)$，$|v^*(\alpha^*(\epsilon),\epsilon)|_{2,\epsilon}=O(\epsilon^2)$ などを用いると

$$|u_0(\cdot,\epsilon)-U(\cdot,\epsilon)|_{2,\epsilon}=O(\epsilon),\quad \epsilon\to 0 \tag{1.91}$$

が成り立つこともすぐわかる．定理 1.3 の性質(i)は U の形より直ちに従う．命題 1.7 と同様にして次が成り立つことが確かめられる．

命題 1.9　$u_0(x,\epsilon)$ での線形作用素 $\mathcal{L}^\epsilon\equiv\epsilon^2\dfrac{d^2}{dx^2}+f_u(u_0(x,\epsilon),\epsilon)$: $X\to Y$ の主線形固有値 $\lambda_1^*(\epsilon)$ は

$$\lambda_1^*(\epsilon)=K_1\epsilon+o(\epsilon),\quad \epsilon\to 0 \tag{1.92}$$

をみたす．ここで定数 K_1 は命題 1.7 で与えたものと同じである．

［証明］　安定性はそのスペクトル分布から決定されるので K_1，したがって $J'(0)$ の符号により決まる．これより定理 1.3 の性質(ii)の u_0 の安定性も導かれる．∎

注意 1.10　u_0 は遷移層が 0 から 1 へ立ち上がるものであったが，1 から 0 へ下がるものも同様に構成できる．それを $u_1(x,\epsilon)$ とかくことにしよう．その安定性についても $J'(0)>(<)0$ に応じて漸近安定(不安定)となる．

注意 1.11　$J(x)$ が複数の非退化零点をもつ場合には多重遷移層解の存在と安定性を議論することができる([119]参照)．その場合 n 個の内部遷移層に応じて **n 次元の遅い空間**が存在する．第 5 章において再びこの話題をとりあげる．

§1.3　超微速運動多様体と双曲性

(a)　超微速運動

相分離を記述する最も簡単な非保存系の方程式として次がよく知られている．

$$u_t=\epsilon^2u_{xx}+f(u) \tag{1.93}$$

非線形性 f は，§1.2 で取り扱ったものと同じ双安定型

$$f(u)=\frac{1}{2}u(1-u^2) \tag{1.94}$$

であるが，零点は x に依存しない．(1.93)は，**単独双安定反応拡散方程式**(あるいは Allen–Cahn 方程式)とよばれる．汎関数

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\epsilon^2}{2} |u_x|^2 + W(u) \right\} dx \tag{1.95}$$

を導入する．ここで，$-W(u) \equiv \int_0^u f(s)ds$ と定義される．W は $u=\pm 1$ に同じ深さの底をもつ**2重井戸型ポテンシャル**とよばれるものである．このとき(1.93)は形式的に

$$u_t = -\frac{\delta F}{\delta u}$$

とかける．

$\mathbb{R}$ 上にいくつかの界面(遷移層)があるとき，それらはどのように運動するであろうか？ 2個の界面が存在する場合についてまず形式的にそれらの運動方程式を導こう．非線形項として(1.94)を採用したので，$\epsilon^2 U_{xx} + f(U) = 0$ をみたす単一遷移層が次のようにかける．

$$u(x,t) = \pm U(x) = \pm \tanh \frac{x}{2\epsilon} \tag{1.96}$$

(1.96)において任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$U(x-\theta)$ も再び解となる．すなわち，(1.96)は，平行移動に関して不変である．$x = x_1$ と $x_2\,(> x_1)$ に，遷移層があれば，それは

$$\widetilde{U}(x) = U(x-x_1) - U(x-x_2) - 1 \tag{1.97}$$

で近似されるであろう．実際，もし $x_2 - x_1 \gg \epsilon$ であれば(界面間の距離と遷移層の幅との間にスケールの違いがあれば)，(1.97)は，(1.93)を指数的誤差 $O\left\{\exp\left(-\frac{x_2-x_1}{2\epsilon}\right)\right\}$ を除いてみたしている．そして，x_1 と x_2 を $x_2 - x_1 \gg \epsilon$ をみたす範囲で動かしてもこの事実は変わらない．すなわち，

$$W = \{\widetilde{U}(x) \mid x_2 - x_1 \gg \epsilon\} \tag{1.98}$$

という集合は，指数的誤差があるので(1.93)の不変多様体ではないが，それに極めて近い．ここで大幅なダイナミクスの縮約が期待される．すなわち，(1.93)の解は，(1.97)のような初期値から出発すれば，その形をほとんど変えず(1.98)に沿って変化して行くであろう．したがってその運動は x_1, x_2 の

み(2次元!)の時間変化がわかれば十分である．いわば遷移層にすべての情報が凝縮されているわけで，これは特異摂動的な見方の結果として得られる最も重要な点である．

そこで，x_1, x_2 は t に依存するとし，$b(x,t)$ を十分小さな補正項として，

$$u(x,t) = \widetilde{U}(x) + b(x,t) \tag{1.99}$$

とおこう．ここで，$\widetilde{U}(x)$ は $x_1(t), x_2(t)$ を通して t に依存する．われわれの目的は x_1 と x_2 の運動方程式の主要部を x_1 と x_2 の閉じた形で求めることである．それは(1.99)が(1.93)の解であるという要請から導出されるわけであるが，その主要部は b について2次以上の項を無視した次の線形化方程式の可解条件より求められる．

$$-\dot{x}_1 U_1' + \dot{x}_2 U_2' + b_t = L^\epsilon b + f(\widetilde{U}) - f(U_1) + f(U_2) \tag{1.100}$$

ここで，$\cdot = \dfrac{d}{dt}$，$'$ は変数に関する微分，$U_i = U(x - x_i)$，L^ϵ は

$$L^\epsilon \equiv \epsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + f'(\widetilde{U}) \tag{1.101}$$

である．$\dot{x}_1$ の運動方程式を導こう．$x = x_1$ の近くで $1 + U_2$ は，指数的に小さくなるので，

$$f(\widetilde{U}) - f(U_1) + f(U_2) \cong -3\epsilon(1 + U_2) U_1' \tag{1.102}$$

と近似できる．ここで，$1 - U_1^2 = 2\epsilon U_1'$ を用いた．さらに，L^ϵ を

$$L' = \epsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + f'(U_1) \tag{1.103}$$

と近似する．これを $y = \dfrac{x}{\epsilon}$ で表したものは，§1.2で現れた作用素(1.77)に一致している．L' は，平行移動の自由度からくる0-固有値 λ_0 と対応する固有関数 $\Phi = U_1'$ をもつ．L' は，$L^2(\mathbb{R})$ で考えて自己共役作用素であり，0-固有値は，単純であることも知られている．したがって，(1.100)が b について解けるためには，Fredholm の交代定理より，非同次項は，U_1' に $L^2(\mathbb{R})$ で直交しなければならない．U_2' は，x_1 近くでは指数的に小さくなるので，直交条件の主要部は，

$$\dot{x}_1 \langle U_1', U_1' \rangle = -\langle U_1', f(\widetilde{U}) - f(U_1) + f(U_2) \rangle \tag{1.104}$$

となる．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\mathbb{R})$-内積である．(1.96), (1.102)を用いると，

(1.104)の両辺は具体的に計算できて，その主要部は $\dot{x}_1 = 12\epsilon \exp\left[-\frac{x_2-x_1}{\epsilon}\right]$ となる.

具体的な計算は，例えば，文献[81]に譲るが，直観的には次のように導かれる. U_1 の定義より，U_1' は，x_1 を中心とした ϵ の幅で，$1/\epsilon$ の勾配をもち，それ以外は，$\exp\left(-\frac{|x-x_1|}{2\epsilon}\right)$ の速さで減衰する. 一方，$(1+U_2)$ は，$1+\tanh z = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp(2nz)$ の第 1 項のみを採用すると，x_1 付近では，$O\left[\exp\left(-\frac{|x_2-x_1|}{\epsilon}\right)\right]$ であり，したがって，

$$\langle U_1', (1+U_2)U_1'\rangle \cong O\left[\frac{1}{\epsilon}\exp\left(-\frac{|x_2-x_1|}{\epsilon}\right)\right]$$

となる. よって(1.102)および $\langle U_1', U_1'\rangle = O(1/\epsilon)$ に注意すれば求めるオーダーが出る. $\dot{x}_2$ に対しても同様な計算が可能であり，$\dot{x}_1$ を $-\dot{x}_2$ でおきかえたもので与えられる.

結局，(x_1, x_2) のダイナミクスは

$$\dot{x}_1 = 12\epsilon \exp\left[-\frac{x_2-x_1}{\epsilon}\right], \quad \dot{x}_2 = -12\epsilon \exp\left[-\frac{x_2-x_1}{\epsilon}\right] \tag{1.105}$$

で与えられる. これからわかるように 2 つの遷移層の動きは非常にゆっくりとしており，ほとんど動かない. これが**超微速運動**(very slow motion)とよばれるゆえんである. x_1 と x_2 に働く力は**引力的**である. 引力的であるとは 2 つの遷移層が合体し，1 あるいは -1 の定数状態に漸近することが示唆される. これは方程式(1.93)の十分広い有限区間上の安定定常解が定数解しかない(§4.2 参照)こととも整合的である. 一般に遷移層の合体によりしだいに大きなドメインが形成されるプロセスを**粗視化**(coarsening)とよぶ.

超微速運動を最初に取り上げたのは，日本の物理学者川崎–太田[151]であろう. その厳密な取扱いは，有限区間，Neumann 境界条件の下で，[41]，[104]らによってなされた. また，[26]によるエネルギー評価を用いる方法もある. これらは保存系方程式である Cahn–Hilliard 方程式にも応用され，同様な超微速度運動が得られている(例えば[3]参照). また，それらの高次元版であるバブル解(bubble solution)の超微速運動も研究されている([4], [275]

参照).

さらに上に述べたスケールの違いを利用して，界面の動きを取り出す手法は散逸系のみならず，KdV 方程式や，Benny 方程式などの分散系の方程式におけるパルス相互作用にも有効であり，上とは異なり，**斥力的**であるなど興味深い結果が知られている([81], [229]参照). ただし，それらの数学的証明はこれからの課題である.

(b)　不変多様体と法双曲性

さて上のように界面ダイナミクスをとり出すことが可能であったのは遷移層群を平行移動してえられる(1.98)の集合 W が方程式(1.93)の良い近似になっていることに起因している. 実際，(1.98)をその第0近似とする有限区間上 $[0,1]$ で考えた(1.93)の不変多様体を構成することが可能である. 以下において，その不変多様体は $\epsilon\to 0$ の極限まで込めて**法双曲型**(normally hyperbolic)と捉えることができ，それにより自然に構成できることを[103]に沿って述べる. 逆に，そのような観点に立つことで不変多様体の構成を正則摂動(regular perturbation)としてとり扱えるのである.

法双曲型であるとは接線方向のダイナミクスが法線方向のそれに比べて(時間の向きをうまくとれば)支配的であることをいう. すぐ後で述べるが，それは不変多様体での線形化作用素を法方向に制限したもののスペクトルが虚軸から一定以上離れている場合であり，常微分方程式における平衡点や周期解が双曲的であるということの自然な拡張となっている. 以下では(1.93)を $[0,1]$ 上で考え，境界条件としては Neumann 条件を採用する.

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$

遷移層が N 個の場合といくつかの言葉の準備をしておく. 十分小さな数 $\rho>0$ に対し，次のベクトル $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ の集合 $\Gamma_\rho\subset\mathbb{R}^N$ を定義する.

(1.106)

$$\Gamma_\rho=\{\xi\in\mathbb{R}^N \mid 0<\xi_1<\cdots<\xi_N<1,\ \xi_{i+1}-\xi_i>2\rho,\ i=0,\cdots,N\}$$

ここで，$\xi_0=-\xi_1$, $\xi_{N+1}=2-\xi_N$ である. これは遷移層間および境界との距

離が一定以上離れた界面の運動を考えるために導入する．$\eta_i = \dfrac{\xi_{i+1}+\xi_i}{2}$ $(i = 0, \cdots, N)$ とし，$\xi \in \Gamma_\rho$ に対し関数 $U^\xi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$u^\xi(x) = (-1)^{i+1} U(x-\xi_i), \quad x \in [\eta_{i-1}, \eta_i], \quad i = 1, \cdots, N \tag{1.107}$$

と定義する．ここで，U は(1.96)で導入したものである．u^ξ は U を各 η_i で張り合せた連続，区分的 C^1-関数である．u^ξ の全体は，$L^2 = L^2(0,1)$ に埋め込まれた N 次元 $C^{1,1}$-級多様体 $\overline{W}$ となる．ここで，$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_N)\colon \Gamma_\rho \to \mathbb{R}^N$ を次で定義する．

(1.108)

$$\gamma_i(\xi) = 12\epsilon\left[\exp\left(-\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\epsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\epsilon}\right)\right], \quad i = 1, \cdots, N$$

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1.12（[103]）　十分小さい $\rho > 0$ と整数 $N \geqq 1$ を固定する．十分小さい各 $\epsilon > 0$ に対し，$\hat{u}^\xi \in W^{1,2}$, $\hat{\gamma}(\xi) \in \mathbb{R}^N$ $(\xi \in \Gamma_\rho)$ が存在して次をみたす．

（i）　$\xi \to \hat{u}^\xi$, $\xi \to \hat{\gamma}(\xi)$ は，Lipschitz 連続である．

（ii）　$\widehat{W} = \{u \mid u = \hat{u}^\xi,\ \xi \in \Gamma_\rho\}$ は，(1.93)の $W^{1,2}$ における不変多様体(**超微速運動多様体**)である．

（iii）　$\widehat{W}$ 上の流れは，常微分方程式系 $\dot{\xi} = \hat{\gamma}(\xi)$ で与えられる．

（iv）

$$\|\hat{u}^\xi - u^\xi\|_{W^{1,2}} = O\left(\exp\left(-\frac{\delta^\xi}{\epsilon}\right)\right) \tag{1.109}$$

$$|\hat{\gamma}(\xi) - \gamma(\xi)| = O\left(\exp\left(-\frac{3\delta^\xi}{\epsilon}\right)\right) \tag{1.110}$$

ここで，δ^ξ は $\dfrac{1}{2}\min\{\xi_i - \xi_{i-1}\}$ より小さな任意正数である．□

系 1.13　超微速運動多様体 $\widehat{W}$ は，(1.93)の定常解 $u^{\bar{\xi}}$ を唯一つ含む．$u^{\bar{\xi}}$ は，双曲型(すなわちそこでの線形化スペクトルは虚軸上にはない)であり，$\widehat{W}$ は，その不安定多様体 $W^u(u^{\bar{\xi}})$ の開部分集合である．□

上の系は定理 1.12 の直接の結果である．定理 1.12 は相分離現象の後期過程を記述しているが，遷移層が合体したり，境界にぶつかることによりその

数が変化する**速いダイナミクス**のところはこれらに含まれていない．一般に異なるスケールが交叉するところまで込めて不変多様体を構成するのは困難となる．それは第0近似としてどのようなものをとればよいか定かではなく，かつ法双曲性も破れるからである．

［定理1.12の証明］　技術的な煩瑣をさけるため $N=1$ の場合のみ考える．不変多様体 $\widehat{W}$ の存在をある参照問題の不変多様体 $\overline{W}$ の**法双曲性**から導くというのが全体方針である．その法双曲性とはどのような意味か，またどのような座標をいれて $\widehat{W}$ を作るのか，に対して，そのアイデアを述べよう．参照問題とは，次のことである．

$$\begin{cases} u_t = \epsilon^2 u_{xx} + f(u), \quad x \in (0,1) \\ u_x(0) = \phi_0(u), \quad u_x(1) = \phi_1(u) \end{cases} \tag{1.111}$$

ここで，$\phi_i : W^{2,2} \to \mathbb{R}\ (i=1,2)$ は，次の条件をみたす滑らかな汎関数である．

$$\phi_0(u^\xi) = u^\xi_x(0), \quad \phi_1(u^\xi) = u^\xi_x(1) \tag{1.112}$$

u^ξ の定義より $u^\xi_x(0)$ や $u^\xi_x(1)$ は，$O(\exp(-\rho/\epsilon))$ であり，したがって，ϕ_0, ϕ_1 は，大域的に $O(\exp(-\rho/\epsilon))$-有界であるものを採用できる．したがって，$\epsilon \ll 1$ では，(1.111)は，Neumann 条件のもとでの(1.93)の十分良い近似であると考えられる．さらに，$N=1$ ゆえ(1.107)の形のもとから構成される $\overline{W}$ **は(1.111)の不変多様体**となっている．実際，それらは(1.111)の定常解の集合になっている．

これらより，$\overline{W}$ が何らかの意味で $\epsilon \to 0$ まで込めて退化していないならば，その近くに(1.93)の不変多様体 $\widehat{W}$ が存在すると期待される．法双曲性とは実はその非退化性を保証するものとなっている．それを正確に述べるために $\overline{W}$ の柱状近傍 $\overline{N}$ に次のように座標を導入しよう．

$$\begin{cases} u = u^\xi + v \\ \langle v, u^\xi_\xi \rangle = 0 \end{cases} \tag{1.113}$$

ここで，u^ξ_ξ は，u^ξ の ξ に関する微分である．(1.113)は，各 ξ ごとに，u^ξ を

基点とする線形ファイバー $\mathcal{F}=\{\overline{\mathcal{F}}^{\xi}\}$

(1.114) $$\overline{F}^{\xi}=\{u\mid u\in L^2(0,1),\ \langle u,u_{\xi}^{\xi}\rangle=0\}$$

を導入したことになる．陰関数定理より，(1.113)は，ただちに $\overline{W}$ のある開近傍 $\overline{N}$ から，ファイバー束 $\mathcal{F}$ の 0-切断の開近傍への滑らかな座標変換を与える．$\overline{W}$ 上のグラフとして表される不変多様体 $\widehat{W}$ を求めるということは，$\hat{u}^{\xi}=u^{\xi}+\hat{v}^{\xi}$ として，この $\hat{v}^{\xi}$ とある C^1-級関数 $\hat{\gamma}(\xi)$ があって，

(1.115) $$\begin{cases} (u_{\xi}^{\xi}+\hat{v}_{\xi}^{\xi})\hat{\gamma}(\xi)=\epsilon^2(u_{xx}^{\xi}+\hat{v}_{xx}^{\xi})+f(u^{\xi}+\hat{v}^{\xi}) \\ \hat{v}_x^{\xi}=-u_x^{\xi}, \quad x=0,1 \\ \langle\hat{v}^{\xi},u_{\xi}^{\xi}\rangle=0 \end{cases}$$

をみたすように定めることに他ならない．第1式は微分作用素が接方向に一致するという不変条件を表している．$\hat{v}^{\xi}$，$\hat{v}_{\xi}^{\xi}$，$\hat{\gamma}(\xi)$ は $\epsilon\ll 1$ では十分小さいものと想定される．したがって，$\hat{v}^{\xi}$，$\hat{\gamma}(\xi)$ の第1近似としては(1.115)の線形近似解，すなわち

(1.116) $$\begin{cases} u_{\xi}^{\xi}c(\xi)=\epsilon^2 v_{xx}^{\xi}+f'(u^{\xi})v^{\xi} \\ v_x^{\xi}=-u_x^{\xi}, \quad x=0,1 \\ \langle v^{\xi},u_{\xi}^{\xi}\rangle=0 \end{cases}$$

の解 $(c(\xi),v^{\xi})$ がふさわしいであろう．実際(1.116)は解くことができ，$c(\xi)$ が超微速運動の主要部を与える．

命題 1.14 ([104])　$f\in C^3$ とし，十分小さな $\rho>0$ をとる．このとき，$\xi\in\Gamma_{\rho}$ に依存しない $\bar{\epsilon}>0$ が存在し，任意の $0<\epsilon<\bar{\epsilon}$，$\xi\in\Gamma_{\rho}$ に対し，(1.116)は一意的な解 $c(\xi),v^{\xi}$ をもつ．$c(\xi)$ は C^2-級であり，$p^{\xi}=u^{\xi}+v^{\xi}$ は $\Gamma_{\rho}\to W^{2,2}$ の関数として C^2-級である．さらに，

(1.117) $$c(\xi)=\gamma(\xi)\Big(1+O\Big(\exp\Big(-\frac{\gamma}{\epsilon}\delta^{\xi}\Big)\Big)\Big), \quad \xi\in\Gamma_{\rho}$$

がみたされる(この $\gamma(\xi)$ は(1.108)において $N=1$ としたもので与えられる)．ここで，δ^{ξ} は $\delta^{\xi}<\min(\xi,(1-\xi))$ をみたす任意正数である．　□

(1.116)の線形化微分作用素を $\overline{W}$ の法線方向に制限したものを作るために

L^2 における次の射影 $\overline{P}^{\xi}, \overline{Q}^{\xi}$ $(\xi\in\Gamma_\rho)$ を定義する.

(1.118)
$$\overline{P}^{\xi}\phi=\frac{\langle\phi,u_\xi^\xi\rangle}{\langle u_\xi^\xi,u_\xi^\xi\rangle}u_\xi^\xi,\quad \overline{Q}^{\xi}=I-\overline{P}^{\xi}$$

このとき次が成り立つ(証明については，[3], [219]または[41]を参照).

命題 1.15　十分小さい $\rho>0$ をとり固定する．各 $\xi\in\Gamma_\rho$ および $\phi\in C^2[0,1]\cap\overline{F}^{\xi}$, $\phi_x=0$, $x=0,1$ に対し，$\overline{A}^{\xi}$ を次で定義する.

(1.119)
$$\overline{A}^{\xi}\phi=\overline{Q}^{\xi}(\epsilon^2\phi_{xx}+f'(u^\xi)\phi)$$

このとき，$\overline{A}^{\xi}$ は，$\overline{F}^{\xi}=\overline{Q}^{\xi}L^2(0,1)$ 上の自己共役作用素に拡張され，さらにそのスペクトルは，ϵ および ξ に依存しない定数 $c\,(>0)$ が存在して

(1.120)
$$\mathrm{spectr}\,\overline{A}^{\xi}\leqq -c$$

をみたす.　□

ϵ によらず不等号(1.120)が成り立つというのが $\overline{W}$ が**法双曲的**であるということの実質的な意味である．前述したように，$\overline{W}$ は，(1.111)の不変多様体であり，その上でのダイナミクスは $\overline{W}$ が，(1.111)の定常解の集合であるから，恒等的に0となる．これは，(1.93)の真の不変多様体 $\widehat{W}$ とその上のダイナミクスの第0近似と考えられる．単に不変多様体上での運動が $O(\exp(-c/\epsilon))$ を示すだけなら $\overline{W}$ からのズレを計算すればよい．しかし定理1.12は $\hat{\gamma}=\gamma+e$ という形でより高精度の評価(1.109)を要求している．そのためには一段高い近似，すなわち命題1.14の v^ξ を用いて，多様体 W

(1.121)
$$W=\{u\mid u=p^\xi=u^\xi+v^\xi,\ \xi\in\Gamma_\rho\}$$

を作り，これからの摂動として $\widehat{W}$ を求める．すなわち，新たに W の柱状近傍 $\mathcal{N}$ と，ファイバー束 $\mathcal{F}$ を，

(1.122)
$$\begin{cases} u=p^\xi+w \\ \langle w,p_\xi^\xi\rangle=0 \end{cases}$$

とおいて，$\mathcal{F}=\{F^\xi,\ \xi\in\Gamma_\rho\}$，$F^\xi=\{w\mid w\in L^2(0,1),\ \langle w,p_\xi^\xi\rangle=0\}$ により導入し，(1.118)と同様に射影 P^ξ,Q^ξ を(ただし u_ξ^ξ を p_ξ^ξ でおきかえる)定義する．そして，$u=p^\xi+w$ を(1.93)に代入すると，ξ と w に関する次の連立方程式が得られる.

$$\dot{\xi} = c(\xi)a(\xi, w) + b(\xi, w) \equiv \Theta(\xi, w) \tag{1.123}$$

$$w_t = A^{\xi}w + \Theta(\xi, w)K^{\xi}w + h(\xi, w) \tag{1.124}$$

ここで，上の各項の詳細は省略するが([103]参照)，(1.123)は W での線形微分作用素の接方向の主要部を表し，(1.124)の右辺第1項は法線方向のそれを表している．

A^{ξ} の法双曲性を用いて，不変多様体 $\widehat{W}$ を求める概略は次のようである．$\mathcal{F}$ における切断の全体 Σ を考え，$\widehat{W}$ を求めることは方程式(1.123),(1.124)から決まる Σ から Σ の中へある写像 G の不動点を求めることと同値であることを示す．すなわち，$\sigma^{\xi} \in \Sigma$ を与えると，(1.123)の w にこの σ^{ξ} を代入して解くことにより，$\xi(t)$ が決まり，この $\xi(t)$ を(1.124)へ代入して解けば，$w^{\xi(t)}$ は，1つの切断 Σ を与える．この $w^{\xi(t)}$ が一意に求まることおよび写像 G が縮小写像となることを保証しているのが命題1.15(正確には u^{ξ} を p^{ξ} でおきかえたもの)で述べた A^{ξ} の法双曲性なのである．不動点に対応する $\hat{\sigma}^{\xi} \in \Sigma$ の評価などを行えば(1.123)により，定理1.12の $\hat{\gamma}(\xi)$ の超微速運動が得られる． ∎

§1.4　くり込み群の考え方

漸近的な物の見方というのは，その詳細，すなわち初期条件や非線形項の具体的な形などによらない性質を取り出す方法ともいえる．これまでに述べた遅い自由度を速い自由度から分離し，それに合った座標系で見れば自然に十分長い時間にわたって良い近似が得られるというのも，その詳細部分は，速い時間スケールで消え，漸近的に重要となる部分は，遅いスケールのみで十分に記述できることによる．いわば，十分時間がたてば，初期条件の情報はほとんど忘れられ，系に内在する普遍的な部分のみが効いてくるわけである．たとえば，池の中に石を投げ込めば波紋が広がっていくが，その形は，初期には石の形などの詳細に強く依存する(図1.3)．しかし，十分時間がたち，かつ十分遠くから眺めれば，最初がどうであったかによらず，円形に近くなる．

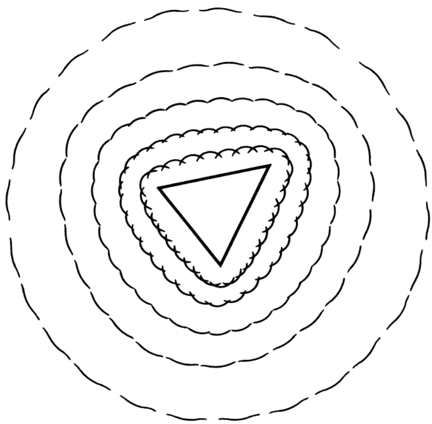


図 1.3　池の波紋．初期の石の形によらず十分時間がたてば円形に近くなる．

このように，時空を粗視化したとき，現れてくる構造を積極的に取り出し，それをもとに漸近的振舞いを特徴づけようという考えは，近年注目を集めており，その代表的なものが**くり込み群的方法**(renormalization method)とよばれるものである．もともとは，場の理論や，臨界現象における異常次元の特徴づけなどに開発された手法であるが，近年その考え方はより広く非線形，非平衡系のさまざまな摂動問題や漸近問題に有効であることが物理学者の大野らのグループ([45], [46], [227]および[271]も参照)により示され，今後の発展が期待されている．

とりわけ，扱う系についての予備知識がなくとも，形式的にある一定のアルゴリズムに従えば，旧来の方法と同じ結果を与えるという意味で注目を集めている．その数学的正当化はこれからの課題であり，以下に述べるものも形式的議論ではあるが，後述の厳密な議論(第 2 章)の序も兼ねてここに紹介する．再び Duffing 方程式(1.1)の永年項問題に戻ろう．前もって何の情報も持っていないとして，(1.3)の形で局所的な近似解を作る．ただし，任意の時刻 t_0 で任意の初期条件をみたすために，振幅 R_0，位相 Θ_0 を任意定数として導入する．§1.1 と同様に，解のベキ展開の最初の項を計算すると次を得る．

$$(1.125)\qquad x(t) = R_0\cos(t+\Theta_0) +\epsilon\Big\{-\frac{3}{8}R_0^3(t-t_0)\sin(t+\Theta_0)+\frac{1}{32}R_0^3(\cos 3(t+\Theta_0) -\cos(t+\Theta_0))\Big\}+O(\epsilon^2)$$

ここで，R_0, Θ_0 は t_0 に依存する．むろんこれは $t=t_0$ の近くでは R_0, Θ_0 を適当にとる限り，良い近似となっている．

しかしその展開は，$t-t_0=O(1/\epsilon)$ では破綻する．これを意味のある展開とするために，天下り的ではあるが，1つの任意時間 τ を導入して，$t-t_0$ を $(t-\tau)+(\tau-t_0)$ と分解し，$(\tau-t_0)$ を含む項を R_0 や Θ_0 の中にくり込むことを考える．すなわち，乗法的くり込み定数 $Z_1=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\epsilon^n$ と加法的くり込み定数 $Z_2=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\epsilon^n$ を導入し，

$$(1.126)\qquad R_0(t_0) = Z_1(t_0,\tau)R(\tau)$$

および

$$(1.127)\qquad \Theta_0(t_0) = \Theta(\tau)+Z_2(t_0,\tau)$$

とおく．a_n および b_n は，(t_0,τ) の関数であり，ϵ の各ベキで $(\tau-t_0)$ を含む項を消去するように選ぶのである．実際，$\epsilon=1$ のときを見てみよう．(1.130) の右辺第1項の cos 項は $\cos(t+\Theta_0)=\cos(t+\Theta)-b_1\epsilon\sin(t+\Theta)+O(\epsilon^2)$ と展開されるから

$$(1.128)\qquad b_1 = -\frac{3}{8}R^2(\tau-t_0)$$

とすれば，第2項の永年項からくる $(\tau-t_0)$ を含む項を消すことができる．$a_1=0$ とすれば，$x(t)$ は，

$$(1.129)\qquad x(t) = R\cos(t+\Theta)-\frac{3}{8}\epsilon R^3(t-\tau)\sin(t+\Theta) +\frac{\epsilon}{32}R^3(\cos 3(t+\Theta)-\cos(t+\Theta))+O(\epsilon^2)$$

となる．ここで，R, Θ は τ の関数である．τ はもとの問題では存在しない変数であり，したがって，**x も τ には依存しない**はずである．よって

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0 \tag{1.130}$$

である．これは**くり込み群方程式**(renormalization group equation)とよばれる．(1.129)を τ で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau}\cos(t+\Theta) - R\sin(t+\Theta)\frac{d\Theta}{d\tau} + \frac{3}{8}\epsilon R^3 \sin(t+\Theta) \\ -\frac{9}{8}\epsilon R^2 \frac{dR}{d\tau}(t-\tau)\sin(t+\Theta) - \frac{3}{8}\epsilon R^3 (t-\tau)\cos(t+\Theta)\frac{d\Theta}{d\tau} \\ +\cdots + O(\epsilon^2) = 0\end{aligned} \tag{1.131}$$

これがすべての t について成立するので

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{d\tau} = O(\epsilon^2) \\ \dfrac{d\Theta}{d\tau} = \dfrac{3}{8}\epsilon R^2 + O(\epsilon^2) \end{cases} \tag{1.132}$$

これを解き，さらに τ は任意時間であったので，とくに $\tau = t$ とおいてその結果を(1.129)へ代入すると，

$$x(t) = R\cos\left(t + \frac{3}{8}\epsilon R^2 t\right) + O(\epsilon) \tag{1.133}$$

を得る．これは前に平均化法によって得られた(1.22)と同じものとなっている．以上の計算は形式的ではあるが，前もって解に対する予備的知識やスケーリングをせずに，局所近似解からのみ出発して(1.133)に到達できることは驚きでもある．

しかし，あまりにも天下り的かつ唐突でもあったので，ここで，**包絡面法**(envelope method)([176]参照)による別の解釈を述べよう．それは，くり込み手法の別の見方を与えるのみならず，くり込み群に不慣れな読者にもより自然に受け入れられると考えるからである．いま求める軌道が $x^*(t)$ であるとしよう．各 $t=t_0$ に応じて局所解(1.125)をうまくとれば各 $t=t_0$ で $x^*(t)$ に接するようにできるであろう(図1.4)．ここで，R_0, Θ_0 は定数ではなく，積極的に t_0 の関数とみなしていることに注意しよう．この見方に立て

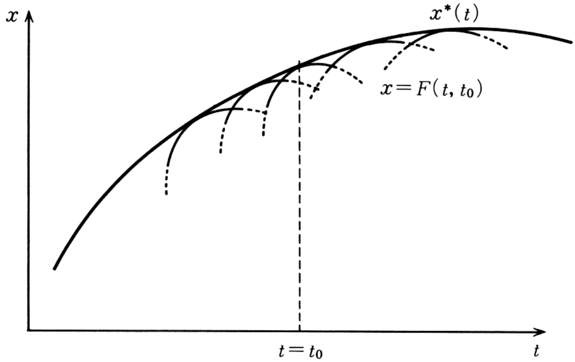


図 1.4　局所近似解の包絡線としての大域解

ば，図 1.4 から明らかなように，求める解 $x^*(t)$ は t_0 をパラメータにもつ曲線群 $x=F(t,t_0)$ の包絡線と見なせる．ここで，$F(t,t_0)$ は，(1.125)の右辺である．包絡線を求めるには，

$$\frac{\partial F}{\partial t_0}(t,t_0)=0 \tag{1.134}$$

より，$t_0=t_0(t)$ をまず求める(パラメータを消去する)．これより，包絡線 $x=F(t,t_0(t))$ が得られる．しかし，われわれはすでに $t_0(t)$ の関数形は $t_0=t$ でなくてはならないことを知っている．なぜなら，上の曲線群は，$t=t_0$ で求める解 $x^*(t)$ に接していると仮定したからである．すなわち，任意の時刻 t で採用しなければならない曲線は，パラメータ t をもつ曲線 $x=F(t,t)$ である．

このことは，(1.134)を具体的に計算するときにおおいに役立つ．実際，先に注意したように R_0, Θ_0 も t_0 の関数とみなすので(1.134)は，かなり複雑となるが，$t=t_0$ とおくと，永年項を含む項はすべて消える．これより，

$$\begin{cases} \dfrac{dR_0}{dt}=0+O(\epsilon^2) \\ \dfrac{d\Theta_0}{dt}=\dfrac{3}{8}\epsilon R_0^2+O(\epsilon^2) \end{cases} \tag{1.135}$$

が得られる．これは初期値 (R_0,Θ_0) を時間 t と共にどのようにとっていかな

ければならないかを決める方程式となっている．(1.135)を $O(\epsilon)$ まで採用し，解けば，(1.17)と同じ解が得られ，$O(1/\epsilon)$ の時間まで有効近似解が得られることは明らかであろう．

上の方法で重要なことは，前にも述べたように各時刻 $t=t_0$ で方程式(1.1)をある微小有限区間で解くという自明な手続きのみ必要で，時間スケールをとりかえたり，平均化したりという準備や技法が不要なことである．しかし，必ずしも上の方法が有効な近似を与えるとは限らない．

次の簡単な例を考えよう*1．

$$\frac{dA}{dt} = \epsilon A^2 - \epsilon^2 A \tag{1.136}$$

単純に解の形を

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \cdots \tag{1.137}$$

と仮定して(1.136)に代入して最初の数項を計算すると，

$$A(t;t_0) = A_0 + \epsilon(t-t_0)A_0^2 + \epsilon^2\{(t-t_0)^2 A_0^3 - (t-t_0)A_0\} + O(\epsilon^3) \tag{1.138}$$

を得る．明らかに右辺には永年項が現れている．これに前述の方法を適用すると

$$\begin{cases} A(t) = A_0(t) + O(\epsilon^2) \\ \dfrac{dA_0}{dt} = \epsilon A_0^2 \end{cases} \tag{1.139}$$

となり，これがもとの(1.136)の有効な近似だとすれば，$A\equiv 0$ は不安定平衡点という結論に達する．しかし，これは正しくない．何を間違えたのであろうか．(1.136)を変数分離法で直接解けばわかるように，$A(t)$ は，$\epsilon^2(t-t_0)$ を一塊として t に依存している．すなわち単純に(1.137)において $O(\epsilon)$ からはじまる近似を仮定したのがまずかったのである．また，この場合は $A=\epsilon$ というもう1つの(1.136)の平衡点が存在し，これが ϵ に依存するため上の形式的展開を無効にしているともいえる．

実際，方程式を見れば，$A=\epsilon\widetilde{A}$ とおくのが自然であり，$\tau=\epsilon^2 t$ とすれ

---

*1　以下の議論は栄伸一郎氏および桑村雅隆氏の教示に基づく．

ば(1.136)は

$$\frac{d\widetilde{A}}{d\tau} = -\widetilde{A} + \widetilde{A}^2 \tag{1.140}$$

と同値であることがわかり，上の誤りを犯すことはないであろう．別の例として，より高次の近似，例えば $O(\epsilon^{-2})$ の時間スケールまで有効な近似をくり込み群の手法により求めようとすると，それは Duffing 方程式の場合に行った $O(\epsilon^{-1})$ の時間スケールまでの近似と比べて単純ではなく，注意が必要である．実際，線形の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.141}$$

を考えると，たやすく求積できて，厳密解は

$$x(t) = Ae^{-\frac{\epsilon}{2}t}\cos\left(\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\,t+\theta\right) \tag{1.142}$$

となる．A, θ は初期条件からきまる定数である．明らかに振幅は $O(\epsilon t)$ の時間スケールで変化し，位相は $O(\epsilon^2 t)$ で変化する．しかし，形式的に(1.141)の局所近似解を計算し，(1.130)に対応するくり込み方程式を導出しても，それが望ましい(R, Θ をそれぞれ振幅，位相パラメータとして)

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{d\tau} = -\dfrac{\epsilon}{2}R \\ \dfrac{d\Theta}{d\tau} = -\dfrac{1}{8}\epsilon^2 \end{cases} \tag{1.143}$$

となるとは限らない．それは各近似解を作るときの初期条件を十分注意して選ばない限りそうならないからである(読者は自ら試してみられたい)．これは前もって解の振舞いについての予備的知識なしに構成できるというくり込み群の良さがなくなってしまうことを意味する．

上の例は人工的であり，あげ足とりにも見えるが，より現実的な問題においてはある程度注意を払う必要性を示唆している．どのような数学的枠組みにおいて形式的アルゴリズムが自動的に少なくとも正しい主要部を決定できるのかは取り組まねばならない課題である．同時に，くり込み群の考え方の

枠組みとその応用の可能性はここで述べたものにとどまらず潜在的に極めて広いものがあり，今後の発展が期待される.

《要約》

1.1　Duffing方程式に現れる永年項問題を古典的な方法と平均化法を用いて解決した. 遅い自由度が何であるかを明らかにした.

1.2　空間方向に現れる内部遷移層の位置と幅がどのように決定されるか変係数単独2階双安定系において調べた.

1.3　極端に遅いスケールをもつ超微速運動を法双曲性を用いて不変多様体上の運動として特徴づけた.

1.4　くり込み群の基本的アイデアを非線形常微分方程式を例にして紹介した.

2 振幅方程式

着目している現象のスケールに比べて系のサイズが十分大きい場合，無限領域で近似して考えることが多い．これにより境界からの影響を考えなくてよくなり，また Fourier 変換などの手法も使えるようになる．例えば同心円筒間にはさまれた流体が回転と共に引きおこすさまざまな不安定化とパターン形成は無限円筒における問題(Taylor–Conette 流)として捉えられてきた．これによりすっきりとした定式化が得られるが，一方でいくつかの困難が生じる．とりわけ連続スペクトルがもたらす困難は長い間の懸案であった．それは，有限領域では不安定化をおこすとき，離散スペクトルの挙動を追えばよく，したがってスペクトルギャップがあるので中心多様体定理が使えて，その結果本質的に有限次元の問題に帰着される．

しかし，無限領域(extended system)では一般にそのようなギャップはなくなり，したがって連続濃度の波数成分が一斉に不安定化するので，そのような帰着は不可能となる．すなわち，無限自由度の不安定化をどのようにコントロールできるかが問題となる．物理学者 Newell–Whitehead–Segal らは不安定点近くでは振幅方程式(amplitude equation)とよばれる偏微分方程式を提案し，それがもとの系をよく近似するものとしてさまざまな解析を行ってきた([214]およびその文献参照)．

最もよく知られているのは Ginzburg–Landau 方程式(GLE)とよばれる非線形偏微分方程式である．これは**無限系での不安定点近くでの普遍方程式**と

でもよぶべきものである．つまり，もとの現象やモデル方程式によらず，不安定化の仕方にのみ依存してそれは出てくるからである．これは有限系の分岐点付近での中心多様体上のダイナミクスがいくつかの標準形に分類されていることに対応する．この考えは一般化され，有限振幅解の近くでの振舞いにも適用され蔵本らによる位相方程式(phase equation)([208])の考えにつながっている．

この章では振幅方程式がどのように導出され，もとの方程式系をどのように近似し，さらにそれがどのようなダイナミクスを有するかを概観する．また，前章の最後に述べたくり込み群の考えが振幅方程式の性質を調べる際に有効であることにも触れる．

§2.1　秩序変数とは何か

多様なダイナミクスのその詳細のすべてを記述することは無理があるし，また必ずしも意味があるとは思えない．それでは系の支配的な変数とはどのようなものであろうか．直観的には，(1) 時間的にすぐ減衰する遷移部分を取り去ったもの，(2) 粗視化して見えてくる大きな構造のゆっくりした変化，などが浮かぶ．(1)は有限次元でいえば中心多様体に乗ってくるものを見ようということであり，(2)は例えば「うなり」が良い例である．そこで重要なことは，細かい振動部分ではなく，ゆったりとした振幅の変化である．どちらもすぐわかるように時空スケールの違いを利用している．もっと一般的にいうならば，「秩序変数」とはスケールの違いを利用して取り出した自由度に対応する変数で，系を漸近的に特徴づけるものといえる．線形微分方程式では単に実部が0以上の固有値に対応する部分がこれにあたるが，非線形問題では工夫が必要となる．

表2.1のように，大きく分けて4つのカテゴリーに秩序変数は分類される．散逸系においては有限領域で考える限り，スペクトルは離散的となり，さらに，その中で実部が0以上の活性なものは有限個となる．したがって中心多様体理論が使えて，その上のダイナミクスの主要部は有限次元のODE

表 2.1　秩序変数の 4 つのカテゴリー

非平衡度 ＼ スペクトル	分岐点近傍	非平衡
離散的 (有限領域)	振幅方程式(ODE), 中心多様体	有限振幅解とその安定性，複合分岐点の大域解析
連続的 (無限領域)	振幅方程式(PDE)	位相方程式(envelope equation, phase equation)，slowly modulated patterns

(ordinary differential equation: 常微分方程式)で与えられ，これが振幅方程式となる．非平衡の領域に入ると，有限振幅解をとり扱う必要があるのですべてを解析的に処理することはできないが，複合分岐点の理論および数値的に分岐解を追跡することにより原理的にはその様子をほぼ解明できると考えられる．しかし現象の典型的サイズ(周期パターンならばその周期)と比べて系のサイズが十分大きい場合(アスペクト比が大きいとき)，系はしばしば無限系としてとり扱われる．このとき系が不安定化するときは一般に連続濃度のスペクトルがそれに関与する．したがって中心多様体理論は使えず，別の縮約による近似を考える必要がある．

これを考えるには，もとの現象にもどる必要がある．流体系，とりわけ，Bénard 対流や Taylor–Conette 流においては周期構造がしばしば観察されるが，その波数の変動はゆっくり変わる場合が多い．Newell–Whitehead–Segal らは，基本周期構造の振幅部分がはるかにゆっくりとした時空スケールにのみ依存するとして，それがみたすべき方程式を必要条件として導出した．それは Bénard 対流のときは Newell–Whitehead 方程式とよばれる偏微分方程式となり，次のような形をとる(詳細は[208]参照)．

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mu\lambda_1 W + D\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_c}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 W - g|W|^2 W$$

この振幅方程式は PDE(partial differential equation: 偏微分方程式)であるが，もとの Bénard 系(Navier–Stokes 方程式と温度場の組み合さったもの)と比べると大幅な縮約となっている．分岐点から十分離れた非平衡のところでは，線形不安定モードの振幅という形ではもはや記述できないが，なんら

かの構造が基本としてあり，そこからの揺らぎがゆっくりと変化・伝播するようなものについては位相による記述が有効となる．すなわち基本構造はほとんど変わらず，ただその時空間での配置がゆるやかに変化すると考えて，その配置の変数が従う方程式を取り出そうという考えである．系が振動場であるときにそのような発想から導き出された方程式として有名なものとして，§2.4で扱う蔵本–Shivashinsky 方程式がある(詳細は[208]参照)．

以下では対流現象を記述する最も簡単な Swift–Hohenberg 方程式をとりあげ，そこから振幅方程式としての Ginzburg–Landau 方程式を取り出し，その性質を調べる．さらに標準形としての GLE がどのような意味でもとの方程式を近似しているかも論ずる．

§2.2　振幅方程式の導出

振幅方程式の形式的導出として，次の3つを与える．

(i)　振幅展開による方法

(ii)　時空間のリスケーリングによる方法

(iii)　対称性による方法

ここでは対流現象を記述する Swift–Hohenberg 方程式(SHE)に対して，これらを適用し Ginzburg–Landau 方程式(GLE)の導出を試みる．

振幅展開法

1次元 Swift–Hohenberg 方程式は次の4階方程式である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u+\lambda u-u^3 \tag{2.1}$$

ここで λ は実パラメータであり，対流的不安定性の強さを表す．(2.1)の自明解 $u\equiv 0$ は $\lambda>0$ のとき，不安定となる．実際 $u\equiv 0$ で線形化した問題

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 v+\lambda v \tag{2.2}$$

で $v=e^{\mu t+ikx}$ とおくと，$\mu(k)=-(1-k^2)^2+\lambda$ となり，$\lambda>0$ のとき，$u\equiv 0$ は

線形不安定となる.

より詳しくみるために，$\lambda=\epsilon^2$ とおくと，$\pm k_c=\pm 1$ の近くで高さ $O(\epsilon^2)$，幅 $O(\epsilon)$（図2.1参照）で不安定化がおこることがわかる．それ以外の波数 k のところでは真に負になっている．これは(2.2)の解は時間 $O(1/\epsilon^2)$ たてば波数 $\pm k_c$ の幅 $O(\epsilon)$ のところにのみ Fourier 成分のピークが立つことを意味する．したがって $\lambda=\epsilon^2$ のとき，不安定成分の時空間変化を $O(1)$ でみるためには新しい時空のスケールを $T=\epsilon^2 t$，$X=\epsilon x$ とすればよいことが示唆される．これはもとの物理変数からみれば空間方向には「ゆったり」とした変化に着目し，時間方向には「遅い」変数にとりかえたことになる.

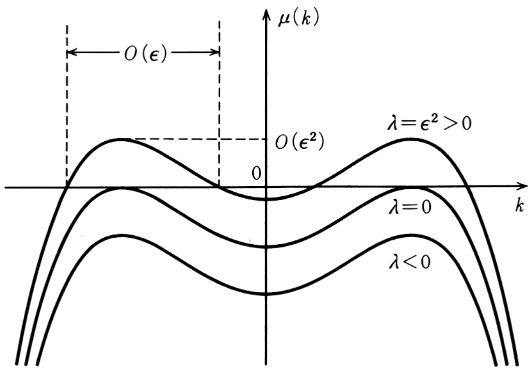


図2.1　Swift–Hohenberg 方程式の自明解の不安定化

以上の考察により，次の形式的近似解が導かれる.

$$u_A(t,x)=\epsilon\{A(T,X)e^{ix}+\overline{A}(T,X)e^{-ix}\} \tag{2.3}$$

ここで $A(T,X)$ は (T,X) に依存する最不安定 Fourier 成分 e^{ix} の複素振幅である．これを方程式(2.1)へ代入し，e^{ix} の係数を等置すると A は形式的に次の GLE をみたすことがわかる.

$$\frac{\partial A}{\partial T}=4\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+A-3|A|^2 A \tag{2.4}$$

独立変数はすべて遅い変数に変わっていることに注意しよう．GLE は不安

定点の近くでは普遍方程式であるといったが，もとの方程式系の個性は実はGLEの係数の中にとり込まれている．振動的な不安定化であれば複素係数となるし，非線形項が変われば係数も変化する．しかしGLEの形そのものは変わらない．

リスケーリング法

u のかわりにリスケーリングされた時空変数に依存する次の新しい従属変数 v を導入する．

$$u(t,x) = 2\epsilon\,\mathrm{Re}(v(\epsilon^2 t, \epsilon x)e^{ix}) \tag{2.5}$$

この形は上で述べた線形化方程式(2.2)の分散関係に基づいてリスケールされていることがわかる．振幅展開法と異なるのは新しい従属変数の導入により方程式そのものがかきかえられる点にある．この変換はSHEのフロント解をはじめ種々の解を無限次元版中心多様体定理を適用するときなどに有用となるものである．$v=v(T,X)$ は次をみたす．

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \left(4\frac{\partial^2}{\partial X^2} + 1 - 4i\epsilon\frac{\partial^3}{\partial X^3} - \epsilon^2\frac{\partial^4}{\partial X^4}\right)v - 3v|v|^2 - e^{\frac{2iX}{\epsilon}}v^3 \tag{2.6}$$

ϵ が小さいとき，$e^{\frac{2iX}{\epsilon}}$ は高周波の係数となり，v が滑らかにとどまるならば，$e^{\frac{2iX}{\epsilon}}v^3$ の寄与は小さいと考えられる．そこで形式的に $\epsilon\to 0$ とすると，(2.4)のGLEが得られる．

対称性による導出

振幅方程式の非線形項が系の有する対称性から決定されることをみよう．まず解 u が(2.3)のように近似できることを仮定する．A がみたすべき方程式の線形部分は線形化問題から導かれた分散関係 $\mu(k)=-(1-k^2)^2+\lambda$ の $k=\pm 1$ 付近での主要部から $\dfrac{\partial A}{\partial T}=4\dfrac{\partial^2 A}{\partial X^2}+A$ となることがわかる．非線形項を決定するために，振幅方程式がみたすべき次の2つの対称性に注目する．

（i）　平行移動に関する不変性

（ii）　空間反転に関する不変性

前者は $A\mapsto Ae^{i\psi}$ $(\forall\psi\in\mathbb{R})$，後者は $A\mapsto\overline{A}$ に関する不変性となる．非線形項

が $A,\overline{A}$ に関する多項式形であると仮定すると，2 次の非線形項 $A^2, |A|^2, \overline{A}^2$ はすべて平行移動に関する対称性をもたない．さらに 3 次項においても対称性を有するのは $|A|^2A$ のみであることが直ちにわかる．これより A がみたすべき方程式は最低次の非線形項のみを考慮すると(2.4)の GLE となる(ただし，係数の -3 についてはこの考察のみでは決まらない)．

§2.3 振幅方程式の有効性

最初の自然な疑問は A が(2.4)に従って変化するとき，近似解 u_A は同じ初期値から出発するもとの方程式(2.1)の解 u をどの程度近似しているかであろう．これは SHE に対しては最初 Collet，Eckmann([55])らにより取り扱われ，さらに van Harten([121])により 2 次の非線形項をもつより一般のスカラー方程式に対しても解決された．得られた結果は粗くいえば，ある $T_0>0$ があって，u_A は $(t,x)\in[0,T_0/\epsilon^2]\times\mathbb{R}$ で一様に解 u を $O(\epsilon^2)$ の誤差で近似するというものである．しかしその証明はかなりこみ入ったものである．ここでは技術的困難に触れずに，GLE の解がいかにもとの方程式の解を近似するかをみるために次の仮定をおく．

仮定 非線形項は 3 次以上である．

SHE はこれをみたしているが，蔵本–Shivashinsky 方程式のように 2 次の非線形項をもつものに対しては以下の方法は直接には適用できない．それらへの拡張については[121]および[261]を参照されたい．

解を比較するためには，それらが同じ空間で存在しなければならない．SHE や GLE に対しては $C_b^m(\mathbb{R})$ を m 階までの導関数が有界かつ一様連続である関数空間とすると，$C_b^4(\mathbb{R})$ に属する初期値から出発する解はすべての $T>0$ に対して一意的に存在し，$C_b^4(\mathbb{R})$ で有界であることが知られている([56]参照)．このとき次の定理が成り立つ．

定理 2.1 ([162]) $A=A(T,X)$ を GLE の解とし，u_A を(2.3)で与えられる形式的近似解とする．このとき各 $T_0>0$ および $d>0$ に対し，$\epsilon_0, C>0$ が存在し，すべての $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ に対し次が成り立つ．$u=u(t,x)$ を初期値が

$|u(0,x)-u_A(0,x)|\leqq d\epsilon^2$ をみたす SHE の解とすると

(2.7) $$|u(t,x)-u_A(t,x)|<C\epsilon^2$$

がすべての $(t,x)\in[0,T_0/\epsilon^2]\times\mathbb{R}$ に対してみたされる.

［証明］ 誤差 $u(t,x)-u_A(t,x)$ が時間 $t\leqq T_0/\epsilon^2$ の間 $O(\epsilon^2)$ にとどまることを示すのが目標である. ところが u_A そのままでは実は具合が悪い. 実際 u_A を SHE に代入すると余りとして $\epsilon^3A^3e^{3ix}+\text{c.c.}$ (ここで c.c. は複素共役を表す)が出てくるが, これは $[0,T_0/\epsilon^2]$ 上で積分すると $O(\epsilon)$ の誤差を生じる. そこで近似を改良して

(2.8) $$v_A(t,x)=\epsilon A(T,X)e^{ix}-\epsilon^3\frac{1}{64}A(T,X)^3e^{3ix}+\text{c.c.}$$

を新たな近似解として採用する. 実は $O(\epsilon^3)$ の項は後に剰余項の $O(\epsilon^3)$ がちょうど消えるようにとっている. $L_\lambda(\partial_x)u=-(1+\partial_x^2)^2u+\lambda u$ とすると,

$$-L_0(\partial_x)(B(\epsilon x)e^{nix})=[(1-n^2)^2B+\epsilon 4in(1-n^2)B'+\epsilon^2(2-6n^2)B''$$
$$+\epsilon^3 4inB'''+\epsilon^4B'''']e^{nix}$$

であるから, この v_A を SHE に代入したときの剰余項 ρ は

(2.9) $$\begin{aligned}\rho(\epsilon,t,x)&=\partial_tv_A-L_0v_A-\epsilon^2v_A+v_A^3\\&=\epsilon^3\left[(\partial_TA-4\partial_X^2A-A)e^{ix}-(1-3^2)^2\frac{1}{64}A^3e^{3ix}+\text{c.c.}\right]\\&\quad+\epsilon^3(Ae^{ix}+\overline{A}e^{-ix})^3+O(\epsilon^4)\end{aligned}$$

となる. A は GLE をみたすので, 上の $O(\epsilon^3)$ の項はすべて消え去り, $\rho=O(\epsilon^4)$ となる.

そこで $u-v_A$ を $O(\epsilon^2)$ と評価するために $u(t,x)-v_A(t,x)=\epsilon^2R(t,x)$ とおいて R の一様有界性を示す. SHE に代入して R のみたすべき方程式は

(2.10) $$\partial_tR=L_0R+\epsilon^2a(\epsilon,t,x)R+\epsilon^3N(\epsilon,t,x,R)+\epsilon^2r(\epsilon,t,x)$$

(2.11) $$R(0,x)=(u(0,x)-v_A(0,x))/\epsilon^2$$

となる. ここで, $a(\epsilon,t,x)=1-3(v_A(t,x)/\epsilon)^2$, $N(\epsilon,t,x,R)=-3(v_A/\epsilon)R^2-\epsilon R^3$, $r=\rho/\epsilon^4$ である. 前の ρ の計算と A は時間大域的に存在して有界であるので, r は $(0,\epsilon_0)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}$ で有界である. また ϵ_0 を小さくとっておけ

ば $|R(0,x)| \leqq 2d$ としてよい．

さてこの微分方程式を R の積分方程式にかき直し，その $C_b(\mathbb{R})$ でのノルム(通常の sup ノルム)で評価しよう．L_0 に対応する半群を $G(t)=e^{L_0 t}$ とかこう．これが $C_b(\mathbb{R})$ 上の一様有界な強連続な半群となること(証明は[162]の補助定理 2.3 をみよ)を仮定すると，(2.10)は

(2.12)

$$R(t) = G(t)R(0) + \epsilon^2 \int_0^t G(t-s)[a(\epsilon,s)R(s) + \epsilon N(\epsilon,s,R(s)) + r(s)]ds$$

とかきかえられる(x 変数は以下省略する)．各 $D>0$ に対し，ある $M>0$ がとれて $\|R\| \leqq D$, $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ に対し $\|N(\epsilon,s,R)\| \leqq M$ とできる．さらにある $C>0$ がとれて，$\|G(s)\|, \|r\|, \|a(s)\| \leqq C$ とできる．よって $R(t)$ が半径 D の球内にとどまる限り，次が成り立つ．

$$\|R(t)\| \leqq 2Cd + \int_0^t \epsilon^2 C^2 \|R(s)\| ds + \epsilon^2 t C(\epsilon M + C)$$

いま $\epsilon^2 t \leqq T_0$ とすると，Gronwall の不等式より

(2.13) $$\|R(t)\| \leqq \widetilde{C} e^{\epsilon^2 C^2 t}, \quad \widetilde{C} = 2Cd + T_0 C(\epsilon M + C)$$

が $t \leqq T_0/\epsilon^2$ の範囲で成り立つ．さて ϵ_0 を小さくとって $\epsilon M \leqq C$ が成り立つようにし，$\widehat{C} = 2Cd + T_0 C(C+C)$ および $D = \widehat{C} e^{C^2 T_0}$ とおくと，(2.13)はすべての $t \leqq T_0/\epsilon^2$ に対して $\|R(t)\| \leqq D$ が成り立つことがわかる．かくして $u(t,x) - u_A(t,x) = \epsilon^2 R(t,x) - \epsilon^3 (A^3 e^{3ix} + \text{c.c.})/64$ となるので証明がおわる．∎

注意 2.2 非線形項が 2 次からはじまるとすると上の議論は適用できない．それは(2.10)の右辺の 1 次の摂動項 $\epsilon^2 aR$ が $O(\epsilon)$ となり長時間スケール $O(1/\epsilon^2)$ にわたる誤差評価ができなくなるからである．

注意 2.3 いくつかの方向への一般化が可能である．近似度を上げて剰余項 $\rho = O(\epsilon^n)$ $(n>4)$ とできて，誤差評価を $O(\epsilon^{n-2})$ まで上げることができる([121]および[137]参照)．非線形項は一般の 3 次項 $g(u) = O(|u|^3)$ であり，さらに g が導関数 $\partial_x^k u$ $(k=1,2,3)$ に依存する場合にも拡張できる([56]および[121]参照)．

注意 2.4 u_A したがって u も $O(\epsilon)$ であるから，(2.7)の $O(\epsilon^2)$-近似はそれよりも 1 つ次数が高く確かに近似となっている．また振幅方程式による近似は §2.1

で述べた自然な時間スケール $O(1/\epsilon^2)$ で有効であることにも注意しよう.

§2.4　Ginzburg–Landau 方程式の吸引性

Ginzburg–Landau 方程式(GLE)による近似というのは(2.3)より Fourier 空間でみれば $k=\pm 1$ のみに鋭いピークをもつ非常に特殊な分布によるものであった. より一般的な分布をもつ初期値から出発するとき, 時間と共にこの特殊な分布に近づき, したがって漸近的には GLE の支配下に入るであろうか. 実際 SHE や蔵本–Shivashinsky 方程式(KSE)において小さい初期値から出発すれば, ある時間の後, Fourier 成分の大きさは図 2.2 のようになることが数値的に確かめられる.

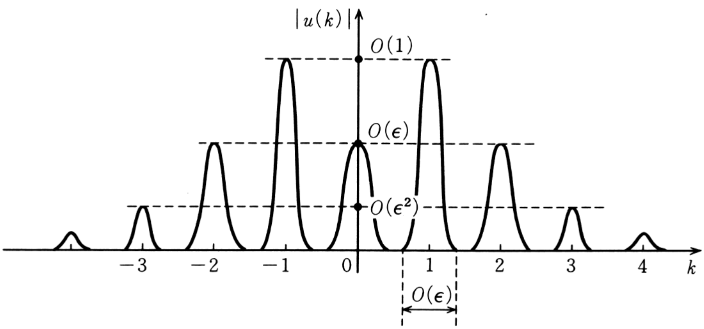


図 2.2　スペクトルのクラスター波数分布

これは非線形相互作用を通じて, 最不安定波数 $|k_c|=1$ の整数倍のところに Fourier 成分が強く集中する様子を示している. より詳しくは波数 k が $|k-nk_c|=O(\epsilon)$ のところでその Fourier 成分の大きさが $\epsilon^{|n-1|}$ となり, それ以外のところでは急速に減衰するような分布である. これは**クラスター波数分布**(clustered mode-distribution)とよばれる. 図 2.2 は GLE の高次までの近似解の構造

$$v=\epsilon\{A_1e^{ix}+\text{c.c.}\}+\epsilon^2\{A_0+(A_2e^{2ix}+\text{c.c.})\}+\cdots$$

と対応していることにも注意しよう. ここで A_1, A_0, A_2 の各係数は $T=$

$\epsilon^2 t$, $X=\epsilon x$ のみに依存している．van Harten が[121]で示したことは，もとの方程式の初期値の Fourier 変換が図 2.2 のような分布をもてば，対応する GLE の解は定理 2.1（厳密には少し弱い形）と同様な意味の近似になっていることであった．

この節では最初に述べた問題を次の 2 次の非線形項をもつ方程式（この場合が一番困難）に対して考えよう．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + N(u), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

u はベクトルでもよいが，ここでは簡単のためスカラーとする．L は x についての実定係数の線形微分作用素であり，あるコントロールパラメータ R に依存するとする．$N(u)$ は 2 次の非線形項であり

$$N(u) = 2\pi\rho(u^2)$$

という形にかけるとする．ここで ρ は L と同じような定数係数の線形微分作用素である．ここで L, ρ のシンボル $\mu(k;R)$, $\rho(k;R)$（e^{ikx} に L,ρ を施したときに現れる係数）を次で定義する．

$$Le^{-ikx} = e^{-ikx}\mu(k;R)$$
$$\rho e^{-ikx} = e^{-ikx}\rho(k;R)$$

ここでは μ, ρ は簡単のため，実とする．L は $\rho(k;R)/\mu(k;R) \to 0$, $|k| \to \infty$ の意味で ρ より高次とする．さらに L については $\mu(k;R)$ が図 2.3 のように振る舞うとする．

より詳しくは最初に不安定化する $R=R_c$ の近くで

$$R > R_c, \quad R - R_c = \epsilon^2$$

とするとき μ は図 2.3 のように放物線状となることを仮定する．したがって R_c を越えたときの不安定化は図 2.1 のようになる．後のために(2.14)を Fourier 変換したものを導いておこう．$\Phi(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx$ とすると，(2.14)は次のように変換される．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu(k;R)\Phi + \rho(k;R)\Phi * \Phi \tag{2.15}$$

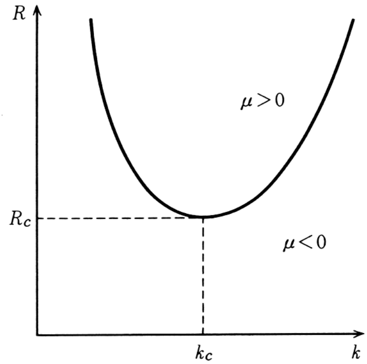


図 2.3 L のパラメータによる不安定化

ここで，$\Phi * \Phi$ は合成積である．$\Phi^0(k)$ を初期値 $u(x,0)$ の Fourier 変換とすると

$$\Phi(k,t) = e^{\mu(k;R)t}\left[\Phi^0(k) + \rho(k;R)\int_0^t e^{-\mu(k;R)t'}\Phi * \Phi dt'\right]$$

となる．上のすべての条件をみたす典型例としては蔵本–Shivashinsky 方程式(KSE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u + \lambda u + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

が挙げられる．ここで $\lambda = R - R_c$ とした．

初期値として，その Fourier 変換が $L^1 \cap L^\infty$ の意味で $O(\epsilon)$ であるものをまず考えよう．それらの全体は図 2.2 のようなものは当然含んでいるが，各整数波数のところでピークをもつ必要はない．示されなければならないことは，そのようなものに対してもピークの谷間の成分は急速に減衰し，時間 T_0/ϵ^2 $(T_0 > 0,\ T_0 = O(1))$ 後にはクラスター波数分布となることである．もしそうであれば van Harten の結果により，その後は GLE のダイナミクスに従うこととなる．Eckhaus [76] は次の結果を得た．

定理 2.5 方程式(2.14)の初期値の Fourier 変換 $\Phi^0(k)$ は次をみたすとする．

$$\Phi^0(k) = \delta_k(\epsilon)\varphi^0(k), \quad \varphi^0 = O(1)$$
$$\delta_k(\epsilon) = \max[f(k,k_c),\epsilon]$$
$$f(k,k_c) = \frac{\epsilon^2}{(k-k_c)^2+\epsilon^2}$$

このとき σ を任意の小さな正定数とすると，時間

$$t = \frac{\widetilde{T}}{\epsilon^{2-\sigma}}, \quad \widetilde{T} = O(1)$$

においては

$$\Phi(k,t) = \tilde{\delta}_k(\epsilon)\varphi(k,t), \quad \varphi = O(1) \tag{2.16}$$
$$\tilde{\delta}_k(\epsilon) = \max\left\{\sum_{n=0}^{N}\epsilon^{|1-n|}[f(k,nk_c)]^N, \epsilon^N\right\}$$

となる．ここで N は任意の大きな整数である． □

注意 2.6 $0<p<1$ に対し $|k-nk_c|=O(\epsilon^p)$ のとき $[f(k,nk_c)]^N=O(\epsilon^{2N(1-p)})$ であるから，$O(\widetilde{T}/\epsilon^{2-\sigma})$ には $|k-nk_c|=O(\epsilon)$ の外側で非常に速く Fourier 成分の大きさが減衰することがわかる(減衰する速さより，(2.16)は多項式型クラスター分布とよばれる).

注意 2.7 $\sigma>0$ ゆえ，クラスター分布に落ちつくのに必要な時間は GLE が有効な近似である時間幅 $O(1/\epsilon^2)$ よりはるかに短い.

上の結果は図 2.2 の波数分布，したがって Ginzburg–Landau 近似が吸引性をもつことを示している．吸引性の領域が $L^1\cap L^\infty$ で $O(\epsilon)$ というのはかなり強い制限である．より実用的な $\mathbb{R}$ 上で有界な関数を含む形への拡張が近年進められている．例えば[261]では KSE に対して，初期値が $\|u_0\|_{W^{4,\infty}} \leqq C_0\epsilon$, $W^{4,\infty}=\{\partial_x^i u\in L^\infty; i=0,\cdots,4\}$ をみたせば定理 2.5 で述べた Fourier 成分のピーク間の減衰は $0\leqq t\leqq O(1/\epsilon^2)$ および $n\in\mathbb{Z}$ に対して $e^{-|k-nk_c|\sqrt{t}}$ となることが示された．つまり減衰は指数的に速いことが確かめられている．さらにこのことは KSE を含むので一般の方程式にも適用できることがわかっている.

§2.5　Swift–Hohenberg 方程式の周期定常解の安定性

Swift–Hohenberg 方程式(SHE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u + \epsilon^2 u - u^3 \quad (t \geqq 0,\ x \in \mathbb{R})$$

は $\epsilon^2>0$ が小さいとき3パラメータの周期定常解(ロール解)の族をもつ.

$$u_0(x;\omega,\varphi,\epsilon) = \epsilon\sqrt{\frac{1-4\omega^2}{3}}\,e^{i(1+\epsilon\omega)x}e^{i\varphi} + O(\epsilon^2) \tag{2.17}$$

ここで u_0 は x に関して $2\pi/(1+\epsilon\omega)$ の周期関数であり，ϵ を分岐パラメータとする $u\equiv 0$ からの分岐解として得られるものである(周期を固定すれば，通常の分岐理論が適用できる).

(2.4)の Ginzburg–Landau 方程式(GLE)も直接計算により次の3パラメータ定常解をもつことがわかる.

$$A_0(X;\omega,\varphi,\epsilon) = \sqrt{\frac{1-4\omega^2}{3}}\,e^{i\omega X}e^{i\varphi} \tag{2.18}$$

(2.3)および $X=\epsilon x$ より，これは上の u_0 の主要部と一致する．共に ω,φ は $|\omega^2|<\frac{1}{4}$, $\varphi\in[0,2\pi)$ を動くとする．この節では，これら定常解の安定性について議論する．まず GLE については陽的にスペクトルを計算できる．実際，周期解 A_0 のまわりでの線形化方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + v - 6|A_0|^2 v - 3A_0^2\overline{v} \equiv Lv$$

となる．固有関数の形を

$$v(T,X) = e^{\sigma(\kappa)T}(ae^{i(\omega+\kappa)X} + be^{-i(\omega+\kappa)X})$$

とおけば

$$\sigma(\kappa) = -(1-4\omega^2) - \kappa^2 + \sqrt{(1-4\omega^2)^2 + 16\kappa^2\omega^2}$$

となり，ω に応じてそのグラフは図2.4のように変化する.

グラフからわかるように，$4\omega^2<\frac{1}{3}$ のときに安定性が変わる．さらに

(i)　$4\omega^2<\frac{1}{3}$ のとき，実部が正のところにスペクトルがないという意味で線形安定(Eckhaus 安定)であるが，平行移動不変性と無限区間上の問

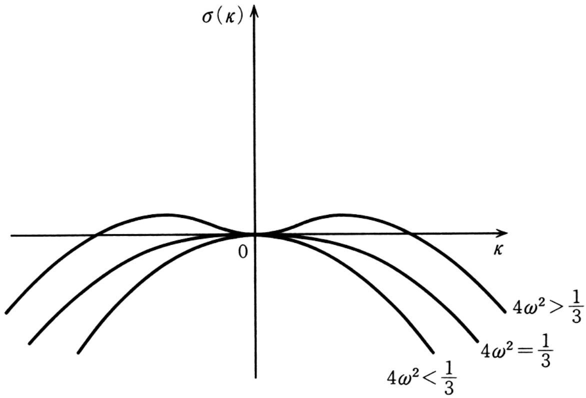


図 2.4　GLE の周期定常解におけるスペクトル分布
$\left(4\omega^2=\frac{1}{3}\right.$ を境に Eckhaus 不安定性がおこる)

題ゆえ原点までスペクトルがきている.

(ii)　$4\omega^2>\frac{1}{3}$ のときの不安定性は **Eckhaus 不安定性**(Eckhaus instability)とよばれるが，これは固有関数 v の形より「波長」を変化させる不安定性となっている.

いま，GLE の Eckhaus 安定な周期定常解を 1 つとるとき，これは何らかの意味で非線形安定性をもつであろうか．この非線形安定性に関わる基本的困難は次の臨界安定性である.

臨界安定性(marginal stability)

たとえ Eckhaus 安定領域 $4\omega^2<\frac{1}{3}$ にある定常解でも，その線形化スペクトルは原点まで連続スペクトルがきており(臨界安定)，スペクトルギャップがないのでその非線形安定性は自明ではない.

また，たとえこれが解決されても本来 GLE は SHE の近似方程式として導入されたのであった．したがって GLE に対する安定性から直ちに SHE に対する安定性は出てこない．実際これには大きな障害がある.

Ginzburg–Landau 方程式による近似の限界

GLE において非線形安定性がいえたとして，それから直ちに SHE の定常解の非線形安定性はいえない．それは GLE による近似定理(定理 2.1 参照)

は時刻 $O(1/\epsilon^2)$ まで有効であるが漸近的にはわからないからである.

GLE の定常解の非線形安定性については Bricmont–Kupiainen [25] らにより証明された([61] も参照). それはくり込み群のアイデアにより臨界安定性の困難を克服するものであった. GLE の近似の有効範囲を解が安定な場合に $t=+\infty$ まで拡張する試みは現時点ではまだないようである. したがって SHE に対し直接くり込み群の手法などを用いて安定性を示すことが考えられている. 実際 Schneider [263] により次の結果が得られた.

定理 2.8 ある ϵ_0 が存在して次が成り立つ. いま ω, φ および $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ を固定し, $u_0 = u_0(\omega, \varphi, \epsilon)$ は Eckhaus 安定な Swift–Hohenberg 方程式の定常解とする. $v|_{t=0}$ をある空間 $\mathcal{B}$ に属する十分小さい元とし($\mathcal{B}$ の詳しい定義は [263] を参照), $u_0+v|_{t=0}$ を初期値にとる. すると, ある正の定数 $C_1(\omega, \epsilon)$ がとれ摂動 v は各 $p \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ に対し漸近的に L^∞ の意味で

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \widetilde{A} e^{-x^2/4C_1(\omega,\epsilon)t} \partial_x \tilde{u}_0(\omega, \varphi, \epsilon)[x] + O(t^{p-1}), \quad t \to \infty$$

が成り立つ. ここで $\epsilon \tilde{u}_0 = u_0$ であり, $\widetilde{A}$ は初期値にのみ依存する定数であり, $\epsilon \to 0$ のとき $C_1(\omega, \epsilon)$ および $\widetilde{A}$ は共に $O(1)$ である. □

一見してわかるように熱方程式の多項式減衰と同じ挙動をする. これは有限領域の問題でスペクトルギャップがあるときの指数減衰と対照的である.

実際その証明は, まず SHE の Eckhaus 安定解での線形化スペクトルを詳しく調べ, その主要部は熱方程式のそれと同じであることを示す. 次にくり込み群の手法により, 摂動のクラスをうまく設定すればそれらは熱方程式の解の減衰と同じように振舞うことが示され証明が完了する.

このようにくり込み群は連続スペクトルの困難を処理するのに極めて有効な手法の1つであり, 近年さまざまな解の漸近挙動を調べるのに用いられている.

最後の§2.7 において, このくり込み群の考え方の基本的アイデアをより簡単なモデル方程式を用いて説明する.

注意 2.9 (**パターン選択問題**)　有限区間と異なり無限区間においては無限個の Fourier モードが一斉に不安定化する. したがって, 不安定化の直後であっても

最終的にどのモードが系を支配するかは定かではない．多数のパターンが共存するときどのパターンが選択されるのかを決定するのは，パターン選択問題とよばれるが，これは問題の設定に大きく依存する．というより，どのように問題を設定すれば現象の本質をとらえたことになるのかが最大の問題といってよい．定理2.8で定常解の安定性をみたが，これは各定常解のまわりに適当な摂動を加える限りは多重安定共存することを意味し，パターン選択問題は初期値に依存して決まるということになり，一意的な選択は望めない．しかし現実には，ある特定の定常解にわずかの摂動が加わったような初期値は不自然であろう．現実的な初期値は定数にランダムなゆらぎが入ったものか，コンパクト区間上に台をもつ有限摂動であろう．しかし，これらは大域的な動的ダイナミクスを取り扱うことになり，一般的には困難な課題である．第3章で再びこの問題をとりあげることにする．

注意 2.10　最近，[80]により定理2.8の幾何学的証明が可能となった．それは臨界安定であるにもかかわらず，有限次元の不変多様体の議論にもち込めるという結果であり興味深い．

§2.6　Ginzburg–Landau 方程式のフロント解

前節では対流の周期ロールに対応する Swift–Hohenberg 方程式，およびその振幅方程式である Ginzburg–Landau 方程式の周期定常解の存在と非線形安定性について述べた．現実の対流ロールにおいては全域で同一周期のロール解が現れる場合はむしろまれであり，場所によって異なる周期のものが混在すると考えられる．したがって，どの周期のロール解に落ち着くのかというパターン選択の問題が重要となるが，これはまだ完全な解決にはいたっていない．ここではこれに対する最初のアプローチとして Ginzburg–Landau 方程式に対して次の問題を考える．

問題　$x=\pm\infty$ で一般に周期(波数)が異なるロール解が境界条件として指定されたとき，系はその間でどのように振舞うであろうか．

以下では係数を 1 に規格化した Ginzburg–Landau 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-|u|^2)u, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

で考える．前節で見たように，これは時間依存しない周期解

$$u_q(x) = \sqrt{1-q^2}\, e^{i\varphi} e^{iqx}, \quad q \in [-1, 1],\ \varphi \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

をもち，小振幅解 $(q^2 > 1/3)$ は不安定であり，大振幅解 $(q^2 < 1/3)$ は臨界安定であった．

いま $x=-\infty$ で $u_{q_0}(x)$ および $x=+\infty$ で $u_{q_1}(x)$ $(|q_0|, |q_1| \leqq 1)$ を両端での周期解とする．まず考えられるのはこれらをつなぐフロント解の存在とその安定性である．ここで**フロント解**というのは，$u(x,t) = U(x, x-ct)$ という形をもつ複素数値関数 $U(x,\xi)$ で $\xi \to -\infty$ で $u_{q_0}(x)$ へ，$\xi \to +\infty$ で $u_{q_1}(x)$ に収束するものをいう．c は包絡線の形状が進む速度を表す．これは有限次元の力学系理論におけるヘテロクリニック軌道の存在に対応する．とりわけ $u_{q_0}(x)$ が安定ロール解，$u_{q_1}(x)$ が不安定ロール解であるときは，$u_{q_0}(x)$ が右の $u_{q_1}(x)$ へ侵入し，固定された任意のコンパクト区間で見ていれば安定ロール解 $u_{q_0}(x)$ へ収束すると考えられる(図2.5)．

とくに $u_{q_1} \equiv 0$ $(q_1 = \pm 1)$ のときには，そのようなフロント解は直ちに存在することが次のようにしてわかる．いま $u(x,t) = v(x-ct)e^{iq_0 x}$ とおく．ここで v は複素数値関数であり，$q_0 \in (-1,1)$，$c > 0$ とする．代入すると $v = v(\xi)$ についての常微分方程式

$$v''(\xi) + (c+2iq_0)v'(\xi) + (1-q_0^2 - |v(\xi)|^2)v(\xi) = 0 \tag{2.21}$$

が得られる．いま Hamilton 関数 H を

$$H(v, v') = \frac{1}{2}|v'|^2 + \frac{1}{2}(1-q_0^2)|v|^2 - \frac{1}{4}|v|^4 \tag{2.22}$$

と定義すると，(2.21)は複素散逸係数 $c+2iq_0$ をもつ系とみなされ，軌道にそって $\dfrac{dH}{d\xi} = -c|v|^2 \leqq 0$ が成り立つ．ここで $\xi = +\infty$ での境界条件は $v = 0$ であり，これは(2.21)の安定平衡点である．他方，$\xi = -\infty$ での境界条件は円周 $v = \sqrt{1-q_0^2}\, e^{i\varphi}$ となり，これは不安定である．そして領域 $|v|^2 < 1 - q_0^2$，$H < \dfrac{1}{4}(1-q_0^2)^2$ に入った軌道はそこに留まり，原点へ収束していく．上の円周はこの領域の境界であり，その不安定多様体はこの領域と交わる．し

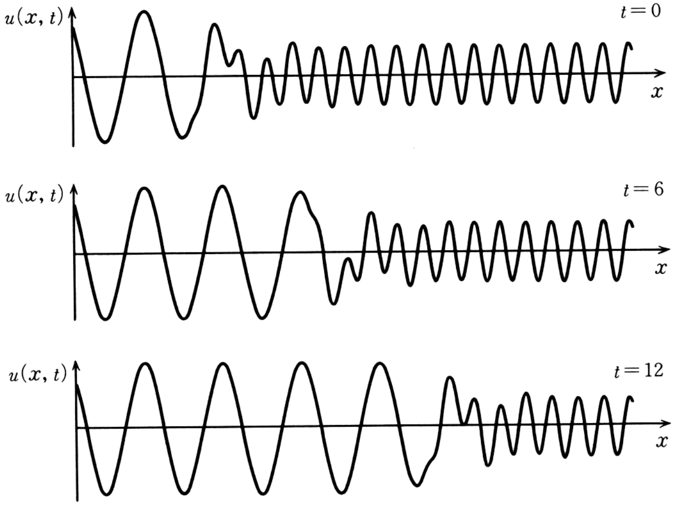


図 2.5 安定ロール解と不安定ロール解をつなぐフロント解. GLE の 2 つのロール解 $q_0=-0.3$ と $q_1=0.9$ をつなぐ, 安定ロール解(u_{q_0})が不安定ロール解(u_{q_1})の領域へ速度 $c=5$ で侵入していく. ([77]の図 1 より転載)

たがって, 左端の周期解 $u_{q_0}(x)$ が何であれ, それは $u_{q_1}\equiv 0$ へ侵入していくフロント解をもつ.

両端の定常解 u_{q_0}, u_{q_1} が共に 0 でないときはそのように単純ではない. 実際, たとえ $u(x,t)=v_0(x-ct)e^{iq_0x}+v_1(x-ct)e^{iq_1x}$ とおいても直ちに非線形項の影響で解はすべての波数 $q_n=q_0+n(q_1-q_0)$ $(n\in\mathbb{Z})$ をもつ. したがって, このときは

$$(2.23)\qquad u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(x-ct)e^{iq_nx}$$

の形で求める必要がある. これを(2.19)へ代入すると C_n に対する常微分方程式系が得られる.

$$(2.24)\qquad C_n'=D_n,\quad D_n'=-(C+2iq_n)D_n+C_n(q_n^2-1)+F_n(C)$$

ここで $F=(F)_{n\in\mathbb{Z}}$ は非線形項に対応するものであり

$$F_n(C) = \sum_{p+s+r=n} C_p C_s C_{-r}^* \tag{2.25}$$

で与えられる．また記号 $'$ は $\xi = x - ct$ に関する微分を表す．求めるべき解 $C(\xi) = (C_n(\xi))_{n\in\mathbb{Z}}$ は次の境界条件をみたすものである．

$$\lim_{\xi\to-\infty} C(\xi) \in C_{-\infty}, \quad \lim_{\xi\to+\infty} C(\xi) \in C_{\infty} \tag{2.26}$$

ここで

$$C_{-\infty} = \left\{ (C_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid |C_n| = \sqrt{1-q_0^2}\,\delta_{n,0} \right\} \tag{2.27}$$

$$C_{\infty} = \left\{ (C_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid |C_n| = \sqrt{1-q_1^2}\,\delta_{n,1} \right\} \tag{2.28}$$

である（$\delta_{i,j}$ は Kronecker の δ である）．

$C_{\pm\infty}$ は定常解 u_{q_0}, u_{q_1} に対応する(2.19)の平衡点の集合からなる円周である（位相のズレによる縮退に注意）．どの $q_0, q_1 \in [-1, 1]$ に対し，方程式(2.24), (2.26)の解は存在するのであろうか．[77], [106]により次の2つが部分的解答として得られている．

定理 2.11（不安定–不安定フロント）　α, c を $0<\alpha<1/2$, $c>0$ をみたす定数とする．そのとき，ある $\epsilon_1 = \epsilon_1(c) > 0$ が存在して，$0 < \epsilon \leqq \epsilon_1$ をみたすすべての ϵ に対して $q_0 = -1+\epsilon$ および $q_1 = 1-\alpha\epsilon$ なる(2.24), (2.26)の解が存在する．さらに $\epsilon_1(c)$ は $c\to\infty$ のとき，ある正の極限値に収束する．　□

定理 2.12（安定–不安定フロント）　q_0 は $-1/\sqrt{3} < q_0 \leqq 0$ をみたすとする．このとき，ある $\epsilon_1 > 0$ と $c_1 > 0$ が存在して，$0 < \epsilon \leqq \epsilon_1$ および $c \geqq c_1$ をみたすすべての ϵ, c に対して(2.24), (2.26)の解が $q_1 = \sqrt{1-\epsilon^2}$ として存在する．　□

注意 2.13　もとの GLE(2.19)が反転と平行移動に関して不変であることに対応して，方程式(2.24)も同様の不変性をもつ．すなわち，R_ϕ を $(R_\phi C)_n = e^{i\phi}C_n$ で，T_δ を $(T_\delta C)_n = e^{in\delta}C_n$ で定義すると，これらは F と可換になる．これより $C_{\pm\infty}$ 上のある対が(2.24)の軌道によって結ばれたなら，$C_{\pm\infty}$ 上の任意の対も結ばれることになる．

注意 2.14　勝手な q_0, q_1 に対してフロント解が存在するわけではない．$u(x,t)$

が(2.19)の任意の解とするとき，2階放物型方程式の最大値原理により $\mathrm{Re}(u(x,t))$ の零点の数は任意の有限区間で見て，時間に関して非増大となる(S. Angenent の注意に負う．零点の非増大性についての詳しい議論は[173]の第6章を参照されたい)．これは $c>0$ として，フロント解は $|q_1|>|q_0|$ のときにのみ存在し得ることを意味する．また方程式(2.19)は複素共役 $u\to\bar{u}$ をとる操作に対して不変であるので $q_1>|q_0|$ の範囲に制限して考えてよい．

注意 2.15　(2.24)は一見，無限個の常微分方程式系に見えるが，実は大幅な縮約が可能である．詳細は[77]に譲るが，中心多様体定理により(複素)2次元の問題に帰着することができる．

Swift–Hohenberg 方程式に対しても上の結果と同様なフロント解の存在に関する部分的解決が[55]および[79]によって得られている．そこにおいても上の注意 2.15 で述べたように中心多様体定理が適用できて実4次元の問題に帰着することができる([106], [200]また[276]も参照)．このように無限次元の問題が実質的に**有限次元**の問題に帰着できるのは，最初に仮定した解の形(2.23)がある種の**周期性条件**をもっているからである．

フロント解の安定性についてはここでは論じなかったが，まだ多くのことがこれからの課題として残っている．それが容易でないのは，例えば GLE における0と1を結ぶ実のフロント解を複素摂動のクラスで考えると，最大値原理などが使えなくなるからである．したがって，くり込み群などの別のアプローチが必要となる．部分的結果として例えば[25], [24]および[57]がある([59], [60], [78]も参照)．

§2.7　くり込み群とその応用

(a)　くり込み群のアイデア

くり込み群の考え方による漸近的な解の特徴づけを次のスカラー方程式について，そのアイデアを簡単に述べよう([23]参照)．

$$\dot{u}=u''+F(u,u',u''),\quad x\in\mathbb{R} \tag{2.29}$$

$x\in\mathbb{R}^n$ の場合でも考え方は同様である．ある関数 f があって，これにより u

が漸近的に

$$u \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f(xt^{-\frac{1}{2}}), \quad t \to +\infty \tag{2.30}$$

と特徴づけられるかどうかを考えよう．これは f という関数形を時間と共に $t^{-\frac{1}{2}}$ という割合で x 方向に引き延ばし，同等にその振幅を $t^{-\frac{\alpha}{2}}$ で小さくしていったものが u の漸近形となることを示している．指数 $\alpha\,(>0)$ も決めなければならない量である．

(2.29)で $F \equiv 0$ の場合にはよく知られた熱方程式となり，次の基本解を用いて解の表示が可能であり，漸近挙動もそれによって特徴づけられる．

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

実際，初期値を遠方で適当に減衰するものをとれば $t \to \infty$ で

$$\sup_x \left| u(x,t) - (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} U e^{-\frac{x^2}{4t}} \right| \leqq O\left(\frac{1}{t}\right) \tag{2.31}$$

がみたされる．ここで $U = \int u|_{t=0} dx$ である．この場合は $f(\xi) = (4\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$ であり，$\alpha = 1$ ととればよい．熱方程式の基本解で特徴的なことは任意の時刻 t と t' における解が時空および振幅のスケール変換により互いにうつりあえる点である．そのような性質をもつものは**スケール不変な解**とよばれる．

実は(2.30)の漸近形で f が $xt^{-\frac{1}{2}}$ のみの関数であるとしたのは，方程式(2.29)の拡散項が t が十分大のとき効いてくるという予想があるからである．もし解 u が(2.30)のように振る舞うならば，空間および振幅のリスケーリングを適当に反復していけば，スケール不変な部分がとり出せるであろう．くり込み群のアイデアは，解の長時間挙動の問題をスケーリングを伴うある固定した「有限」の時間幅の問題の反復解法による不動点の存在と安定性の問題に帰着するものである．その大枠を非線形項 F や空間の詳細にこだわらずに述べよう．便宜上初期関数をとる Banach 空間を $\mathcal{S}$ とかこう．また初期時刻も $t=1$ とするのが便利となる．さてある数 $L>1$ をとり，

$$u_L(x,t) = L^{\alpha} u(Lx, L^2 t) \tag{2.32}$$

とする．ここで u は初期値を $f \in \mathcal{S}$ とする(2.29)の解であり，α は未知の指

数である．(2.32)の右辺は時空を放物型のスケーリング，すなわち熱方程式の基本解を不変にするものを採用していることに注意しよう．L^α は振幅のスケーリングに関わる．

くり込み群写像 $R:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ をこの u_L を用いて形式的に次で定義しよう．

$$(Rf)(x) = u_L(x,1) \tag{2.33}$$

すなわち f から出発して時刻 L^2 まで解き，空間はサイズ L を 1 に縮め，L^α で振幅をもち上げる操作を R とするのである．u_L がみたす方程式は

$$\dot{u}_L = u''_L + F_L(u_L, u'_L, u''_L) \tag{2.34}$$

となる．ここで $F_L(a,b,c) = L^{2+\alpha}F(L^{-\alpha}a, L^{-1-\alpha}b, L^{-2-\alpha}c)$ である．とくに F が単項式 $F(a,b,c) = a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}$ かつ $\alpha=1$ の場合には $F_L = L^{-d_F}F$ となる．ここで

$$d_F = n_1 + 2n_2 + 3n_3 - 3 \tag{2.35}$$

である．$d_F>0$ ならば，くり込み写像を次々と施すと，非線形項の寄与はどんどん小さくなることを意味する．例えば，$F(u)=|u|^p$ ならば $p>3$ のとき $d_F>0$ となる．一般に $d_F>0$ のとき非線形項 F は **irrelevant**，$d_F=0$ なら **marginal**，そして $d_F<0$ のときは **relevant** とよばれる．

さてこのくり込み写像 R は指数 α 以外に L と F にも依存するので $R_{L,F}$ とかこう．特徴的なことは次の**半群的性質**がみたされることである(したがって正確にはくり込み半群というべきであろう)．

$$R_{L^n,F} = R_{L,F_{L^{n-1}}}\circ\cdots\circ R_{L,F_L}\circ R_{L,F} \tag{2.36}$$

右辺の各項はある**固定**された時間幅で方程式を解く写像であり，これの反復により左辺の長時間挙動が計算される．いま R を n 回施した後の時刻を t，すなわち $t=L^{2n}$ とすると

$$u(x,t) = t^{-\frac{\alpha}{2}}(R_{L^n,F}f)(xt^{-\frac{1}{2}}) \tag{2.37}$$

とかける．いま $n\to\infty$ のとき，ある F^*, f^* が存在して

$$F_{L^n} \to F^*, \quad R_{L^n,F}f \to f^* \tag{2.38}$$

が成り立ったと仮定しよう．ここで f^* は R_{L,F^*} の不動点

$$R_{L,F^*}f^* = f^* \tag{2.39}$$

であり，方程式 $\dot{u}=u''+F^*$ のスケール不変な解となっている．この f^* を用いると(2.37)より u の漸近挙動は

$$u(xt^{-\frac{1}{2}},t)\sim t^{-\frac{\alpha}{2}}f^*(x) \tag{2.40}$$

で決定されることがわかる．したがって，解の長時間挙動をくり込み写像 R_{L,F^*} の不動点の存在とその安定性を調べる問題に帰着することができた．不動点の安定性の強さが初期値としてとれる範囲の大きさに関わってくる．

(b)　非線形放物型方程式への応用

これまでの考察より，くり込み群の考え方がいろいろな場面で有効であることを述べてきた．この節では最も簡単な非線形放物型方程式をとりあげ，それがどのように用いられるか具体的に示す．考える方程式は次である．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^p \quad (x\in\mathbb{R}),\quad p>3 \tag{2.41}$$

これの $u\equiv 0$ の安定性の証明を行う．$p>3$ かつ $\alpha=1$ ととれるので(2.35)の d_F は正となり，非線形項 u^p は irrelevant となっている．準備として遠方で $|x|^n$ の重みをつけた関数空間 $H^m(n)$ (m,n は正整数)を導入しよう．

$$H^m(n)=\{u\mid u(x)(1+|x|^2)^{n/2}\in H^m\}$$

ここで H^m は m 階までの導関数が $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ に属する通常の Sobolev 空間である．次が成り立つ．

定理 2.16　ある $\delta>0$ が存在して，$\|u_0\|_{H^2(2)}<\delta$ をみたす初期値に対して次が成り立つ．初期値 u_0 に応じてある $A^*\in\mathbb{R}$ がとれて，$u|_{t=0}=u_0$ をみたす(2.41)の解 u は漸近的に次のように振る舞う．

$$\left\|\sqrt{t}\,u(x\sqrt{t},t)-\sqrt{\pi}\,A^*e^{-\frac{x^2}{4}}\right\|_{H^2(2)}=O(t^{-\min(1,p-3)/2}) \tag{2.42}$$

□

注意 2.17　$H^2(2)\subset L^\infty$ ゆえ上の漸近収束は各点的に正しい．

［証明］　Fourier 変換が $H^2(2)$ からそれ自身への位相同型を与えるから方程式(2.41)のかわりにその Fourier 変換したもの

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -k^2\hat{u} + \hat{u}^{*p} \tag{2.43}$$

を考える．ここで $*p$ は p 重の合成積を表す．

$L>1$ として k,t を $k=K/L^n$, $t=L^{2n}T$ とスケーリングする．新しい従属変数 v_n を $v_n(K,T)=\hat{u}(k,t)$ と定義し，(2.43)右辺第2項は p 重合成積より $L^{(1-p)n}$ の因子が出ることに注意すれば

$$\frac{\partial v_n}{\partial T} = -K^2 v_n + L^{n(3-p)} v_n^{*p} \tag{2.44}$$

を得る．$T=1$ は $t=L^{2n}$ であるから，$n\to\infty$ は $t\to\infty$ に対応する．$p>3$ ならば非線形項は $L>1$ ゆえどんどん効かなくなることに注意しよう．(2.43)を $[1,\infty)$ で解くかわりに(2.44)を逐次，次のように解いていく．

まずスケール変換 $(\mathcal{L}_{1/L}f)(K)=f(K/L)$ を定義しておく．

(i) $n=1$: 方程式(2.44)を区間 $[1/L^2,1]$ で解き，その解を v_1 とする(もとの t では $[1,L^2]$)．次に $\mathcal{L}_{1/L}v_1(\cdot,1)$ を $n=2$ の場合の初期値にとり，時間幅 $[1/L^2,1]$ で解く(もとの t では $[L^2,L^4]$)．すなわち，$v_2(\cdot,1/L^2)=\mathcal{L}_{1/L}v_1(\cdot,1)$.

(ii) $n\to n+1$: 方程式(2.44)を区間 $[1/L^2,1]$ で解き，その解 v_n を用いて，$\mathcal{L}_{1/L}v_n(\cdot,1)$ を次の $n+1$ の場合の初期値にとる．すなわち，$v_{n+1}(\cdot,1/L^2)=\mathcal{L}_{1/L}v_n(\cdot,1)$.

かくして一般に v_n は次の積分方程式をみたす．

(2.45)

$$v_n(K,T) = e^{-K^2(T-1/L^2)}v_{n-1}(K/L,1) + L^{n(3-p)}\int_{1/L^2}^{T} e^{-K^2(T-s)}v_n^{*p}(K,s)ds$$

次の解の評価は縮小写像による解の存在を示すのに重要である．

補題 2.18　ある $\alpha>5$ に対し，$\delta<L^\alpha$ とし，$\|v_{n-1}|_{T=1}\|_{H^2(2)}<\delta$ であるとする．このとき，$C_1, L_0>0$ が存在し，すべての $L>L_0$ に対し，

$$R \equiv \sup_{T\in[1/L^2,1]} \|v_n(T)\|_{H^2(2)} \leqq C_1 L^{5/2-\alpha} \tag{2.46}$$

が成り立つ．

［証明］ $H^2(2)$ と $\mathcal{L}_{1/L}$ の定義より $\|\mathcal{L}_{1/L}v\|_{H^2(2)} \leqq CL^{5/2}\|v\|_{H^2(2)}$ である．まず線形部分の項は

$$\begin{aligned}\sup_{T\in[1/L^2,1]} &\|e^{-K^2(T-1/L^2)}v_{n-1}(K/L,1)\|_{H^2(2)}\\ &\leqq C \sup_{T\in[1/L^2,1]}\|e^{-K^2(T-1/L^2)}\|_{C_b^2}\|v_{n-1}(K/L,1)\|_{H^2(2)}\\ &\leqq CL^{5/2}\delta\end{aligned}$$

一方，非線形項は

$$\sup_{T\in[1/L^2,1]}\left\|L^{n(3-p)}\int_{1/L^2}^{T}e^{-K^2(T-s)}v_n^{*p}(K,s)ds\right\|_{H^2(2)} \leqq CL^{n(3-p)}R^p$$

ここで

$$\|u*v\|_{H^2(2)} \leqq C\|u\|_{H^2(2)}\cdot\|v\|_{H^2(2)}, \quad \forall u,v\in H^2(2)$$

を用いた． ∎

これより多少の計算の後，δ を仮定のようにとり，L を十分大きくとれば積分方程式(2.45)の右辺は $C([1/L^2,1],H^2(2))$ の半径 $CL^{5/2-\alpha}$ の球における縮小写像となることがわかる．よって積分方程式(2.45)の解の一意存在と求めていた評価が得られる．

さて残るは上で求められた解 v_n の $T=1$ における値 $v_n|_{T=1}$ が $n\to\infty$ のときある $A^*\in\mathbb{R}$ が存在して $A^*e^{-K^2}$ に $H^2(2)$ で収束することを示さねばならない．詳細は例えば[263]を見ていただくとして，そのアイデアは次のようなものである．$\psi=e^{-K^2}$ として

$$v_n|_{T=1} = A_n\psi+\rho_n$$

と分解する．ただし ρ_n の平均は0，すなわち $\rho_n(0)=0$ とする．次に $|A_{n+1}-A_n|$，$\|\rho_n\|_{H^2(2)}$ の評価をおこない，A_n は幾何級数的にある極限 A^* に収束し，$\|\rho_n\|_{H^2(2)}\to 0\ (n\to\infty)$ を示す．このとき同時に t についての減衰オーダーも出すことができる． ∎

《要約》

2.1　スケールの違いによって取り出される遅い自由度が秩序変数であることを具体例によって述べた.

2.2　3つの形式的な振幅方程式の導出を述べた.

2.3　振幅方程式の解がもとの系を十分長い時間にわたってよく近似していることを Ginzburg–Landau 方程式を例にとり証明した.

2.4　Ginzburg–Landau 方程式に従う軌道の集合が初期値の空間で吸引的であることを示した.

2.5　Swift–Hohenberg 方程式の周期定常解の安定性がくり込み群的手法により証明できることを紹介した.

2.6　多くの周期定常解の中でどれが選択されるかを調べる上で重要なフロント解の安定性，不安定性を議論した.

2.7　有限時間の問題を反復して解くことにより，不動点を見つけ，それにより解の漸近挙動を決定するくり込み群の方法を述べた.

3

臨界安定性仮説とパターン選択

安定な解が多数共存している場合でも，ある特定の解が選ばれるのはなぜだろうか．例えばその例として，結晶成長における形とその速度の決定問題は古くから注目を集めていた．表面張力や異方性という特異摂動的な効果がそのパターン選択にどのような役割を果たすかを最初に概観する．次にどのようなダイナミクスにより物理的に自然な初期値から選択されるパターンに収束するのかという問題を考える．これは困難な問題でまだほとんど手がつけられていない．唯一の例外が1次元進行波解の速度選択の問題であり，そこにおいて有用な臨界安定性という考えを紹介する．

§3.1　パターン選択とは

非線形系において多くの安定な解が共存することは稀れではなく，したがって漸近状態は初期値に依存して変わってくる．しかし一方で，われわれが目にする現象の多くは再現性をもっているのも事実である．例えば過冷却下での結晶成長は，遠方での過冷却度(すなわち，どの程度冷やすか)に応じて，その形状や成長速度は一意に決まる．この章においては多くの可能性の中から，なぜ特定のパターンが選択されるのかその原理を探ることにする．

最も抽象的に言うならば，上の問題は最も広い吸引領域をもつアトラクターは何かということである．しかし，これはあまり実用的な言い換えでもな

いし，適切ですらないかも知れない．すなわち広くても薄く分布しているなら，その方向に摂動をかければすぐはずれてしまうだろうし，また広いということとそれが意味のある重要な初期値をすべて含んでいることとは別である．このことは，パターン選択あるいは解の安定性の問題は初期値や摂動のクラスと切り離しては考えられないことを意味する．すなわち摂動のクラスが空集合ならば，すべては安定となるし，非常に大きければ不安定になりやすい．このこと自体は自明であるが，問題に合った意味のある適当な摂動の集合と安定性の関係をうまく設定することは決して自明でない．

現実の系は一意に解を選択するのに，モデル系においてはそうではないということはしばしばおこる．実際，なんらかの物理的効果を考慮しなかったために解の縮退が導入されてしまうのは大いにあり得ることである．その具体例も兼ねて，次節において，樹枝状結晶におけるパターン選択の議論を振り返る．表面張力や異方性の効果がそこでは本質的役割を果たすが，それらは**特異摂動**的効果となっている(第5章において phase field モデルの特異極限という立場から，この問題を再考する)．別の言い方をすれば，構造不安定な系に特異摂動的効果を入れることにより構造安定な系への変換を行ったことになる．

これはパターン選択の問題に対する新しい見方を提供する．すなわち選ばれるパターンは構造安定系がもつ解の極限として与えられるというものである([46]も参照)．ここでの構造安定性とは多くの解の安定共存を許さない，したがって，ほとんどすべての初期値から出発して唯一の状態に収束する系という意味で用いている．§3.3においては双安定系(そこでは進行波解の速度が一意に決まる)の極限としての Fisher–Kolmogorov 方程式における速度選択問題を考える．これは上に述べた結晶成長の例とは異なり，非線形項に変更を加えることにより構造安定性を得ている．

しかし，モデル方程式が必ずしも常に何らかの効果を入れ忘れているわけでもないのでどのような内部原理により，選択が行われているかを知ることは重要である．とくにその中で実用上も有用な**臨界安定性仮説**(marginal stability criterion)について Fisher–Kolmogorov 方程式を例にとりながら，

§3.4 および §3.5 で詳しく述べる．

Fisher–Kolmogorov 方程式における速度選択については §3.3 で述べるように Aronson–Weinberger [8], [9] により数学的に決着がついているが，なぜ最小速度の進行波が選ばれるかという一般的な選択原理については明らかにされていない．個別の方程式の枠を越えた選択ルールを求める必要がある．その一つの候補として臨界安定性仮説がある．それは実用的な判定法を与えるのみならず，安定性の解析から界面の成長において基本的な不安定性である先端分裂(tip-splitting)および横枝成長(side-branching)についての知見も与えてくれる．また，最大値原理の使えないより一般的な方程式に対してもそれは有効であると期待されている．

§3.2 樹枝状結晶小史

実験によると，過冷却液体中を進む結晶成長において，遠方で過冷却度 Δ を与えると，その形状，とくに先端の曲率半径 ρ と成長速度 V は常に一意に再現される．つまり界面の形状と成長速度は過冷却度 Δ の関数として**一意に選択されている**ように見える．これをどのように説明するかが標題の**パターン選択**(pattern selection)という問題の中身である．これはパターン形成における普遍的問題であり，実際，第4章で論じる渦巻波の周波数選択問題もその一つである．

(a) Stefan 型モデルと幾何モデル

界面がマクロに見て滑らかであるならば，何らかの微分方程式系でその運動は記述できるであろう(拡散律速凝集体(DLA)のように界面がフラクタル構造をもつ場合は，局所的な運動というものは定義できない)．それらは大きく分けて，界面を厚さがなく，状態が不連続に変化する sharp interface とみるか，有限の厚みの内部遷移層をもつかにより2種類のモデルがある．前者の代表は Stefan 型モデルであり，後者は第5章で論じる phase field モデルがよく知られている．ここでは，sharp interface 型のモデルを中心に議論

していく.

過冷却場での結晶成長を温度場 T と界面 Γ の位置のみで記述するのが次の Stefan 型モデルである.

(3.1)　$\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$　　（温度拡散）　　Γ の外

(3.2)　$Lv_n = C_p D[(n\cdot\nabla)T|_{\mathrm{sol}} - (n\cdot\nabla)T|_{\mathrm{liq}}]$

（界面での熱エネルギー保存則）　Γ 上

さらに T は遠方での過冷却条件(後述)をみたす必要がある. 界面 Γ での T の境界条件は次のいずれかを採用する.

(3.3)　$T|_\Gamma = T_M$　　（局所的熱平衡）

(3.4)　表面張力

$$T|_\Gamma = T_M\left(1 - \frac{\gamma}{L}\kappa\right) \qquad \text{（曲率効果）}$$

(3.5)　異方性(2 次元)

$$T = T_M\left(1 - \frac{\gamma + \dfrac{d^2\gamma}{d\theta^2}}{L}\kappa\right) \qquad \text{（方向依存性）}$$

ここで, T は温度, D は熱拡散係数, L は潜熱, v_n は界面 Γ の法線速度, C_p は比熱, T_M は融解温度, γ は表面張力, κ は Γ の平均曲率である. また, n は固相側から液相側へ向く Γ の単位法線ベクトルであり, κ は固相側からみて凹のとき正とする. (3.3)は温度が界面 Γ で融解温度に等しいという自然な条件であるが, これだけでは不十分であり, Γ の曲率(3.4)や異方性(3.5)を考慮したものがよりふさわしいことが後にわかる. (3.4)はしばしば Gibbs–Thomson 条件とよばれる. また, 界面が平面であるときは, これらは(3.3)に一致する. 凝固が進むかどうかは液相側での無限遠方での温度の境界条件 T_∞ が重要となる. $\Delta = T_M - T_\infty$ は**過冷却度**とよばれる.

「一般に Stefan 型のモデルを解くことは難しい!」

それは界面の動きは(3.2)で局所的に定義されているが, 右辺の T は実は全領域での偏微分方程式(3.1)をいずれかの境界条件(これは Γ-依存してい

る)の下で解かなければ決まらないという**非局所性**があるからである．つまり界面の動きを1ステップごとに知るためには，全領域での偏微分方程式をいちいち解かなければならない．これは解析的にも数値的にもやさしいことではない．そこで実際の現象からは少し離れるとしても，数学解析を押し進め，定性的な結晶成長の振舞いを知るために，次のような2次元空間での**幾何モデル**(geometric model)([28], [29])が提唱された．

(3.6)

$$v_n = \kappa + \alpha\kappa^2 - \beta\kappa^3 + \gamma\frac{d^2\kappa}{ds^2}$$

v_n：法線方向の成長速度

s：界面に沿って測った弧長

κ：曲率

$\gamma = \gamma_0(1-\delta\cos(m\theta))$：表面張力効果

($\delta = 0$ 異方性なし，$\delta > 0$ 異方性あり)

κ は法線方向に沿って見て Γ が凹のとき正とし，α, β は定数であり，m は正整数とする．

さらに運動学的条件として次の関係が成り立つ([64]参照)．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\kappa}{\partial t} &= -\left(\kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)v_n \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \int_0^s \kappa v_n ds \end{aligned}\right\}\text{運動学的条件}$$

同様な発想で境界層モデル(boundary layer model)([18])とよばれるものもあるが，ここでは論じない．これらは共に成長速度が非常に大きい場合，したがって**拡散長** $l = 2D/V$ (拡散場中を界面が速度 V で成長するときに，拡散場が影響をうける長さ)が結晶先端の曲率半径 ρ よりうんと小さい場合をモデル化していると考えられる．後に表面張力や異方性がどのように解の存在に関わるかを厳密に調べるときに，このモデルは役に立つ．

さてここで，この節の最初に述べた問題を言い直しておこう．Stefan 型モデル(後に幾何モデル)に対し次を考える．

存在問題　与えられた過冷却度 $\varDelta$ に対し，先端曲率半径 ρ をもち一定の

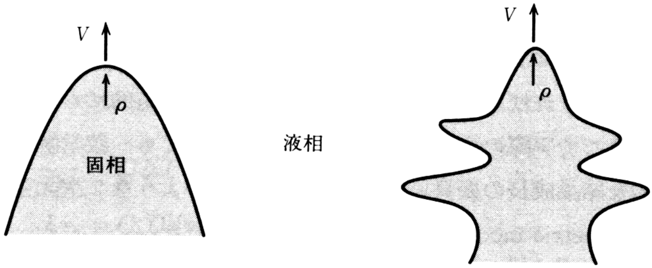


図 3.1　針状結晶解と樹枝状結晶解

成長速度 V で進む針状結晶解(needle crystal)，さらには横枝(side branch)をもつ樹枝状結晶解(dendrite)が存在するか(図 3.1 参照).

選択問題(安定性)　過冷却度 Δ を決めたとき，上記のような解は唯一つに決まるか．唯一つに決まるためには，どのような物理的因子が重要となるか.

(b)　Ivantsov パラドクス

ここでの結論は次のものである.

命題 3.1　表面張力も異方性の効果もなければ(このとき界面は等温的，$T|_\Gamma = T_M$ となる)，Stefan 問題(3.1), (3.2), (3.3)は与えられた過冷却度 Δ に対し，1 パラメータ族の針状結晶解をもつ．したがって，パターンの選択は行われず，連続無限個の解が縮重している.　□

より詳しくは，次のような 3 次元空間の放物界面の解が存在する.

$$z - Vt = \frac{\rho_0}{2} - \frac{1}{2\rho_0}(x^2 + y^2) \tag{3.7}$$

ここで，z は成長速度 V の方向にとった座標軸であり，ρ_0 は先端の曲率半径を表す．放物面座標をとり，求積すれば液体中の温度分布(固体側は $T \equiv T_M$ である)は次のようになる.

$$T(x, y, \zeta) = T_\infty + (T_M - T_\infty)\frac{\mathrm{erfc}[(\sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2} + \zeta)/l]}{\mathrm{erfc}(p)} \tag{3.8}$$

ここで，$\zeta \equiv z - Vt$ は z 方向に速度 V で動く動座標系であり，

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{3.9}$$

は**誤差関数**(error function)である．p は **Peclet 数**(Peclet number)とよばれる無次元量で次で定義される．

$$p \equiv \frac{\rho_0}{l} = \frac{V\rho_0}{2D} \tag{3.10}$$

すなわち p は拡散長 $l\,(=2D/V)$ に対する先端の曲率半径の比になっている．ただし，Stefan 条件(3.2)により，無次元化された過冷却度 $\varDelta$

$$\varDelta \equiv C_p(T_M - T_\infty)/L \tag{3.11}$$

と Peclet 数 p が次の関係をみたしていなければならない．

$$\varDelta = pe^p \operatorname{erfc}(p) \tag{3.12}$$

上の関係(3.12)は次元解析からも知ることができる([238])．かくして針状結晶解は求まったが，(3.12)からわかるように，過冷却度 $\varDelta$ を与えても，成長速度 V と先端曲率半径 ρ_0 の**積**(つまり Peclet 数 p)は一意に決まるが，それぞれの V と ρ_0 は**無限個**の組合せが可能である．この不定性が Ivantsov パラドクスとよばれるゆえんである．

実験によれば，$\varDelta$ を与えれば V と ρ_0 は一意に決まるのであるから，われわれの議論には何かが欠けていることになる．安定性を調べればどれかの解が選択されるという訳でもない．実際(3.1)〜(3.3)の解としての安定性を調べても，どの解も線形化の意味で**不安定**であることがわかっている([183])．そこでこれまでは無視してきた表面張力や異方性を考慮にいれる必要が生じてくる．

(c)　Mullins–Sekerka 不安定性と臨界安定性仮説

表面張力効果と Mullins–Sekerka 不安定性

界面がまっすぐな平板状(planar front)のとき，Mullins と Sekerka は表面張力がその安定性にどのように影響を与えるかを調べた([211])(これは 2 相合金の界面について調べているが，まったく同様に結晶成長の場合にもあてはまる)．まず前提となるそのような平板界面解は確かに**存在**する．実際，曲

率は0ゆえ，界面での温度分布は，どの境界条件の場合でも $T|_\Gamma = T_M$ となり，拡散方程式(3.1)の解は，結晶が z 方向へ定常な速度 V で成長しているとき

(3.13) $$T(z,t) = T_\infty + (T_M - T_\infty)\exp[-2(z-Vt)/l]$$

とかける(固体側は $T \equiv T_M$)．ここで T_∞ は無限遠での過冷却温度であり，$V>0$ は任意である．また l は拡散長 $2D/V$ である．(3.2)を界面位置 $z=Vt$ に適用すれば

(3.14) $$\Delta \equiv C_p(T_M - T_\infty)/L = 1$$

がみたされていなければならない．Δ は無次元化された過冷却度である．

ここで注意すべきは，**成長速度 V は不定**となり決まらないことである．形状は平面と決まったが，速度の方にその不定性がしわ寄せられた形である．正弦波状の摂動をこの平面解に与えて，線形化安定性を調べると，ある波長以上の摂動に対しては不安定化することがわかった．少し具体的に述べると，波長を k として $kl \gg 1$ の下で

(3.15) $$\lambda_s \cong 2\pi\sqrt{ld_0}$$

が**臨界波長** λ_s となることがわかる([179], [180]など)．すなわち，これより長い波長の振幅は増大し，短いものは表面張力により減衰する．ここで d_0 は**毛管長**(capillary length)とよばれる無次元量で

(3.16) $$d_0 \equiv \gamma T_M C_p / L^2$$

と定義される．臨界波長はこの毛管長と拡散長 l の幾何平均に比例することに注意しよう．

臨界安定性仮説(marginal stability criterion)

Langer，Müller–Krumbhaar([183])らは，[211]の方法を針状結晶に適用し，それにより樹枝状結晶の存在と Ivantsov パラドクスを同時に解決しようとした．すなわち，まず彼らは表面張力効果を考慮した境界条件(3.4)の下での Stefan 問題が針状結晶解をもつと仮定する．次に，それに摂動を与えたときの線形化固有値問題の固有値 $\Omega(\sigma)$ $(\sigma \equiv (\lambda_s/2\pi\rho)^2)$ を解析し，さらにいくつかの物理的考察の後，次の臨界安定性仮説を唱えた．

「樹枝状結晶解は針状結晶解における線形化固有値 $\Omega(\sigma)$ が $\mathrm{Re}\,\Omega(\sigma^*)=0$（臨界安定）となる $\sigma=\sigma^*$ で生じる.」

言いかえれば，樹枝状結晶成長では $\sigma^*=2Dd_0/V\rho^2$ が成り立っているとした．この仮説は3次元の場合には実験事実ともよく合致し，説得力もあると思われたが，その大前提が怪しいことが判明してきた．すなわち

「等方的表面張力のみを考慮した Stefan 問題(3.1), (3.2), (3.4)には針状結晶解は存在しない(ようだ).」

“ようだ”とかいたのは，厳密な意味で Stefan 問題が針状結晶解を有しないという証明は(私の知る限り)未だ出ていないからである．もちろん，説得力のある semi-rigorous な解析や注意深くなされた数値実験はいくつかあり，そのどれもが同じ結論に達している(例えば[15], [198], [157]参照).

これら一群の仕事は**可解性理論**(solvability theory)とよばれている．このようによばれる理由は次節以降で明確になる．われわれはここで Stefan 問題を離れて，前に述べた単純化された“幾何モデル”に対し，これらの問題をもう少し厳密に考え直してみよう.

(d)　表面張力・異方性・パターン選択

界面の位置を $x(t,s)$（s: ある基準点から測った弧長）とかくとき，“幾何モデル”とは界面の運動を次の形で記述しようというものである.

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}=U\left(\kappa,\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2},\cdots\right) \tag{3.17}$$

ここで左辺は外向き法線速度を表し，右辺は曲率 κ とその偶数階微分(U の回転不変性からくる)に依存する一般に非線形の速度関数である.

図3.2のような放物線状の針状結晶が一定速度 V で成長しているとき，(3.17)は

$$V\cos\theta=U\left(\kappa,\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2},\cdots\right) \tag{3.18}$$

となる．θ は成長方向と法線方向のなす角である．速度関数 U として(3.6)の形(ただし $\alpha=\beta=0$ として)を採用し，かつ $\kappa=d\theta/ds$ を用いると,

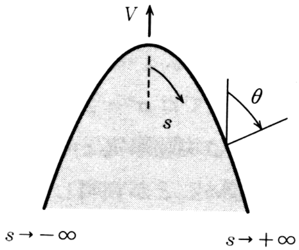


図 3.2　針状結晶解の幾何モデル

(3.19)
$$V\cos\theta = \theta' + \gamma\theta''', \quad ' = \frac{\partial}{\partial s}$$

ここで γ は表面張力係数に対応すると考えている．Vs を新しい弧長(それも s とかく)にとれば，(3.19)は

(3.20)
$$\epsilon^2\theta''' + \theta' = \cos\theta, \quad -\infty < s < \infty$$

となる．ここで $\epsilon \equiv \sqrt{\gamma}V$ とおいた．(3.20)の**針状結晶解**(needle crystal)とは s について単調な関数で次の境界条件をみたすものをいう．

(3.21)
$$\theta(s;\epsilon) \to \pm\pi/2, \quad s \to \pm\infty$$

表面張力係数がない場合，すなわち $\epsilon = 0$ のとき，(3.20)は次の針状結晶解をもつ．

(3.22)
$$\theta(s;0) = -\frac{\pi}{2} + 2\tan^{-1} e^s$$

これは(b)で述べた Ivantsov 解に相当している(s の変数変換で V の不安定性は一見みえなくなっているが)．(3.20)を見れば表面張力効果は最高階 θ の 3 階微分の係数として現れるという意味で**特異摂動**になっている．ϵ が正定数，したがって(3.6)の $\delta = 0$ (異方性なし)の場合に，[174], [5], [120] らによって得られた結果は次のものである．

定理 3.2 (**非存在定理**)　任意の正定数 ϵ (等方的表面張力)に対し，(3.20)は針状結晶解をもたない．　□

これは $\epsilon \to 0$ のとき，(3.22)に連続的につながる(3.20)の針状結晶解を求める努力は徒労に終ることを意味する．

「なぜ存在し得ないのか？」

一つの直観的説明は，(3.20)を力学系の立場から見直すことで得られる．すなわち $(\theta,\theta',\theta'')$ を新しい未知数と考えて，(3.20)を1階の3次元連立系に書き直し，$(\pm\pi/2,0,0)$ での線形化固有値を計算すると

$$
\begin{aligned}
m_1(\epsilon) &= 1-\epsilon^2+O(\epsilon^4)\\
m_{2,3}(\epsilon) &= \pm\frac{i}{\epsilon}-\frac{1}{2}+O(\epsilon)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

となり， m_1 に対応する1次元不安定多様体の存在がわかる．同じように，$(\pi/2,0,0)$ においては1次元安定多様体の存在がわかる．(3.20)の針状結晶解を求めるのは，(3.21)より，上の2つの平衡点を結ぶヘテロクリニック(heteroclinic)軌道の存在を示すことに他ならないが，図3.3よりわかるように，3次元空間の中で2つの1次元軌道を一致させることは，奇跡でも起こらない限り不可能である．

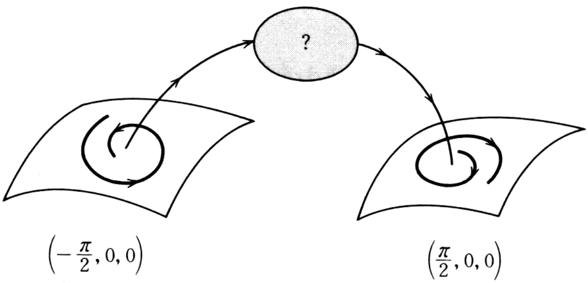


図3.3　針状結晶解のヘテロクリニック軌道

しかし，これの厳密な証明は，見た目ほど簡単ではない．それは対称性より実は図3.3よりはるかに退化した状態で考えねばならないからである．まず次の補題を準備しよう．

補題3.3　(3.23)の正固有値 $m_1(\epsilon)$ に対応して，与えられた $C>0$，$0\ll\epsilon<1$ に対し，次をみたす(3.20)の解 $\theta(s;\epsilon,C)$ が一意に存在する．

$$\theta\to-\pi/2,\qquad (s\to-\infty\text{ のとき}) \tag{3.24}$$

(3.25)　$(\theta+\pi/2)\exp(-m_1 s) \to C$　($s \to -\infty$ のとき)

さらに次をみたす $C=C(\epsilon)$ が一意に ϵ の関数としてきまる.

(3.26)　$$\theta(0;\epsilon,C) = 0$$ □

以下では,常に C は(3.26)をみたす $C(\epsilon)$ をとることにし,対応する解を $\theta(s;\epsilon)$ とかく. $\theta(s;\epsilon)$ がいつ針状結晶解となるのかは次の補題よりわかる.

補題 3.4　$\theta(s;\epsilon)$ が針状結晶解(すなわち,単調増大な(3.20)の解で境界条件(3.21)および $\theta(0)=0$ をみたすもの)となるための必要十分条件は次である.

(3.27)　$$\theta''(0;\epsilon) = 0$$ □

幾何学的には,条件(3.27)は,解 $\theta(s;\epsilon)$ が原点で反対称(anti-symmetric) $\theta(s;\epsilon)=-\theta(-s;\epsilon)$ となることと同値である.

補題 3.3 より,(3.20),(3.24),(3.26)をみたす解 $\theta(s;\epsilon)$ $(-\infty<s\leqq 0)$ は一意に決まる. これがさらに(3.27)をもみたせば求める針状結晶解となる. 実際そのときは奇関数的に折り直したものはすべてをみたす. この意味で(3.27)は**可解条件**とよばれる.

しかし残念ながら,結果は次のとおりである.

定理 3.5　任意の $\epsilon>0$ に対し,$\theta(s;\epsilon)$ は $\theta''(s;\epsilon)>0$ $(-\infty<s\leqq 0)$ をみたす. とくに

(3.28)　$$\theta''(0;\epsilon) \neq 0$$

である. さらに $\epsilon \to 0$ のとき,

(3.29)　$$\theta''(0;\epsilon) \sim 2k\epsilon^{-5/2}\exp(-\pi/2\epsilon)$$

ここで k は零でないある定数である. □

(3.29)の形より,任意のベキより速いオーダーで0にいくが,超越部分が残るのがわかる. これは単純な ϵ-展開で $\theta(s;\epsilon)$ を近似して(3.27)の条件の成否を調べても,**何も結論されない**ことを意味する. 実際,任意の高次近似を行っても,常にそれは(3.27)をみたしてしまう. どうしても "analysis beyond all orders" が必要となる. それでは,(3.28)を得るにはどのようなアイデアを用いるのであろうか. 一つは[174]のように,変数 s を複素平面上に拡張して,詳しい挙動をみる方法がある. 以上により,ϵ が正定数の場

合には(3.20)の針状結晶解は存在しないことがわかった．したがって**等方的な表面張力効果によってはパターン選択は行われない**．

それでは，結晶が**異方性**をもつ場合はどうであろうか．異方性が成長する結晶の先端曲率半径の大きさを決定する重要な因子であることは広く信じられている(例えば[238])．ここでは(3.6)とは異なるが次のような異方性をもつ幾何モデルを考える．

$$\epsilon^2\theta''' + \theta' = g(\theta), \quad -\infty < s < \infty \tag{3.30}$$

ここで

$$g(\theta) = \frac{\cos\theta}{1+\alpha\cos 4\theta}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.31}$$

である．α は異方性の強さを表し，4θ はいまの場合，4回対称の異方性を表している．(3.30)の“針状結晶解”の定義は(3.20)に対して行ったものと同じである．

問題　十分小さい $\epsilon > 0$ に対し，(3.30)が針状結晶解をもつような $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ を求めよ．

[174]によって得られた結論は次である．

定理 3.6　異方性モデル(3.30)の針状結晶解を与える α は複数個存在する．その個数は $\epsilon \to 0$ のとき，$O(1/\epsilon)$ のオーダーで増える．したがって $\epsilon \to 0$ の極限において可算無限個の針状結晶解が存在する．　□

粗くいって，異方性 α の導入により，(3.29)と同様な漸近展開を行うと，振動的な因子が右辺に入ってくることが解の存在をもたらす原因である．それでは，これら複数個の解のうち，実際に実現される(安定性をもつ)ものはどれであろうか．これはパターン選択にとって本質的な問題であるが，完全にはわかっていないようである．ただし，線形化安定性の意味では成長速度の最大のものが最も安定であることが知られている([28], [29], [157])．

さらに，異方性をもつStefan問題(3.1), (3.2), (3.5)に対し，Greenの定理を用いて界面だけの微積分方程式にもちこみ，その線形化固有値問題を形式的に解くことにより，(c)の臨界安定性仮説で登場したパラメータ σ が最も大きいものに対応する解のみが，線形化の意味で安定であることが示され

ている(例えば[16], [11]). しかし, これにはさまざまな議論があり(例えば[253]を見よ), 決着がついていない.

(e) 何が横枝を生み出しているのか

前節の最後で針状結晶解が線形安定であることを述べたが, これは**横枝**が出ないということではない. 針状結晶解と同じ速度で進む座標系から見れば, 先端付近で与えられた摂動はその振幅を増していくが, 同時に裾に向かって流れてゆく. これは連続スペクトルがもたらす伝播型の不安定性であるが, 適当な進行座標系に乗ってみる限り先端の放物形形状は局所的に見れば, 安定に保たれているというわけである(§3.4, §3.5参照).

しかし, これの数学的裏付け(どのような空間で, どのような摂動のクラスに対し, 安定なのか)はこれからの課題である. このことが本当ならば, 先端での微小なゆらぎが, 界面を下る間に, 特定の波長が増幅されて, 横枝発生(side branching)が生じ樹枝状結晶となる**雑音の選択的増幅説**(例えば[182]また[242]も参照)も説得力が出てくる.

一方最近, 界面の厚さが0であるStefan型モデルに代わり, 薄いが有限の厚みをもつphase field モデル(第5章参照)を用いた詳しい数値実験がなされている. 例えば小林([164], [165])によれば異方性の強さによっては

「樹枝状結晶解の先端速度は一定でない」

ということが発見されている(§5.4参照). これはHopf的な離散固有値による不安定化と考えられ, Stefan型モデルの議論では現れなかったものである. もしこれが本当なら横枝の発生は系に固有な不安定振動数と関連することになり, 雑音はとくに必要なくなる.

いずれにせよ, 現時点では横枝発生およびその波長の決定を完全に説明することはできていない. phase field モデルのより精密な数値計算およびそれに伴う理論的解析が何らかの突破口を開く可能性はあり, 期待されている.

§3.3　Fisher–Kolmogorov 方程式における速度選択

不安定領域に局所的な擾乱が与えられたとき，それがまわりにどのような形と速度で広がっていくかはフロント波の伝播という基本的問題である．しかし，非線形ダイナミクスを経由して最終的に最も安定な伝播の仕方に落ち着くまでの全容を明らかにするのは大域的問題であり一般に困難である．以下では不安定領域へ侵入していく伝播波の典型例として次のような Fisher–Kolmogorov 方程式(FKE)をとりあげ，とくに伝播速度がどのように選ばれるかを考えよう．

(3.32) $$u_t = u_{xx} + u - u^3$$

これは第 2 章で考えた GLE を実空間に制限したものになっている．明らかに $u=0$ は不安定であり，一方 $u=\pm 1$ は安定である．$u=0$ のところに $u=1$ という状態がフロント波の形で伝播していく場合を考えよう．どのような速度でそれは進んでいくのであろうか．この問題が自明でないのは一様進行波 $u(x-ct)$（速度 c）の形でフロント解を求めると，可能な速度 c が一意に決まらず 1 パラメータの族の形で存在するからである．これは次のように考えると直観的にすぐわかる．速度 c も未知数の 1 つとしてフロント解 $u=u(\xi)$ は次の 2 階微分方程式をみたさなければならない．

(3.33) $$u_{\xi\xi} = -cu_\xi - \frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4\right)$$

(3.34) $$u(\infty) = 0$$

(3.35) $$u(-\infty) = 1$$

ここで，$\xi \equiv x-ct$ は速度 c の進行波座標である．これは u を 1 次元座標，ξ を時間として，ポテンシャル $V=\dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{4}u^4$ の中を摩擦係数 c の抵抗を受けながら運動する粒子を記述していると考えられる(図 3.4 参照)．

明らかに**任意**の正の摩擦係数 c に対し，時刻 $\xi=-\infty$，速度 0 で $u=1$ を出発した軌道は $\xi=+\infty$ で $u=0$ へ収束する．c が大きすぎなければ $u=0$ のまわりで減衰振動しながら収束する．

この速度 c の不定性はたとえ非負解の u に限定しても同様である．すなわ

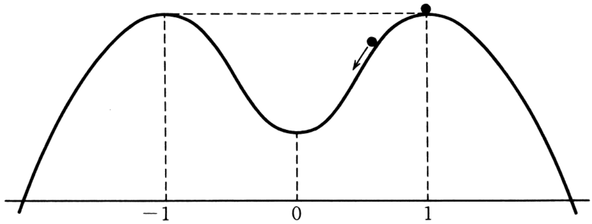


図 3.4 4 次ポテンシャルの中を摩擦を受けながら運動する粒子

ち摩擦係数 c が一定以上に大きければ粒子は単調に $u>0$ を保って，$u=0$ へ収束する．$u=0$ のまわりで振動的に減衰しない最小の摩擦係数 c^* (実は 2 に等しい)以上であれば c は任意にとれる．したがって，単に進行波解の存在の考察だけではどの速度が選択されるかわからない．

これに対する最初の結果が Kolmogorov ら[171]によって与えられた．そこでは初期値は Heaviside 型の関数に限定されるが漸近形まで込めて最小速度 c^* の進行波解に収束することが示された．その後 Aronson–Weinberger [8] らは，より一般的な初期値のクラス(それは物理的に自然な，例えばコンパクト台の関数を含む)から出発してもそのフロント解の速度は漸近的に最小速度 c^* ((3.32)では $c^*=2$)に近づくことを示した．彼らの証明は比較定理を用いたエレガントなものであり，この方向での最初の決定的な結果である．

この章で問題にしたいのは，$c^*=2$ という速度が選択されるメカニズムのより原理的な枠組みは何かということである．それを考慮することにより，比較定理などが適用できないより広いクラスの方程式，さらには一般のパターン選択問題を考える際の有用な視点が得られるからである．

まず[8]の結果を述べておこう，次の方程式を考える．

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{3.36}$$

ここで

$$f \in C^1[0,1], \quad f(0) = f(1) = 0 \tag{3.37}$$
$$f'(0) > 0, \quad f'(1) < 0$$

$$f(u) > 0, \quad 0 < u < 1$$

われわれはとくに $\xi = x - ct$ のみに依存する解 $u(x-ct)$ で

$$u(-\infty) = 1, \quad u(+\infty) = 0, \quad 0 \leqq u \leqq 1 \tag{3.38}$$

をみたすものに興味がある．これは(3.36)の速度 c をもつフロント解とよばれ，次の常微分方程式の解である．

$$\begin{gathered} w'' + cw' + f(w) = 0 \\ w(-\infty) = 1, \quad w(+\infty) = 0, \quad 0 \leqq w \leqq 1 \end{gathered} \tag{3.39}$$

いま $X = \{u \mid u \in C^0(\mathbb{R}),\ 0 \leqq u \leqq 1\}$ と定義する．また c^* を(3.39)の解が存在するような**速度の最小値**とする．このときフロント解の伝播の漸近速度について次が知られている([8], [9])．

定理 3.7

(1) $u(x,t)$ を $u(\cdot,0) \in X$ をみたす(3.36)の解とする．ある x_0 に対して $u(x,0) \equiv 0$，$x \in (x_0, \infty)$ ならば，各 ξ と $c > c^*$ に対して，$\lim_{t\to\infty} u(\xi+ct, t) = 0$ が成り立つ．

(2) さらに，もし $u(x,0) \not\equiv 0$ ならば，各 ξ と $|c| < c^*$ なる c に対して，$\lim_{t\to\infty} u(\xi+ct, t) = 1$ が成り立つ． □

注意 3.8 c^* の f による特徴づけおよび有限確定であることは，例えば[71]の第4章を見られたい．とくに $f(u) = u(1-u)$ であれば，$c^* = 2$ であり，$f(u) = u(1-u)(1+\nu u)$ $(\nu > -1)$ に対しては，$c^* = 2$ $(-1 < \nu \leqq 2)$，$c^* = (\nu+2)/\sqrt{2\nu}$ $(\nu \geqq 2)$ であることが知られている．

注意 3.9 $0 < c < c' = 2\sqrt{f'(0)}$ では正値のフロント解は存在しない．なぜならそのときは $(0,0)$ は相平面において安定な渦状点となり，したがって $(0,0)$ へ近づく軌道は負となるからである．よって $c^* \geqq 2\sqrt{f'(0)}$ である．

注意 3.10 方程式(3.36)は $x \mapsto -x$ に関して不変であるので，もし $u(x,0)$ がコンパクト台をもつならば，各 ξ と $|c| > c_0$ に対して $\lim_{t\to\infty} u(\xi+ct, t) = 0$ となる．

構造安定な系の極限としての速度選択

定理 3.7 においてフロント波の伝播速度は c^* であることが示されたが，な

ぜ最小速度が選ばれるのであろうか．一つの見方は，連続濃度のフロント解が存在するのは問題の設定が良くないために退化しているのであり，何らかの構造安定な系の極限として捉えれば，その速度選択も自然に理解できるのではないかというものである([46]参照)．具体的に(3.36)の非線形項として次を考えよう．

(3.40)
$$f(u)=\begin{cases} u(1-u) & (u \geqq 0) \\ \dfrac{u}{b}(u+b) & (u<0) \end{cases} \quad (b>0)$$

$u \geqq 0$ では定理3.7が適用できて，0と1を結ぶフロント解の漸近速度は最小速度 $c^*=2$（注意3.8）となる．いま $u \geqq -b$ の範囲まで広げて考えると $f(u)$ は双安定系であり，$u=-b$ と $u=1$ が安定平衡点となっている．(3.39)に対応する2次元系

(3.41)
$$\begin{cases} w'=z \\ z'=-cw-f(w) \end{cases}$$

にかき直せば，平衡点 $(-b,0)$, $(1,0)$ は共に**鞍状点**(saddle)であり，$(-b,0)$ の安定多様体および $(1,0)$ の不安定多様体は共に1次元である．したがって，このときは c を適当にとれば，これらをつなぐ一意的なフロント解の存在が期待され，実際，次が成り立つ([99], [71])．

命題3.11　非線形項(3.40)に対し，$u=-b$ と $u=1$ をつなぐ速度 c_b をもつ一意的なフロント解 u_{-b}^1 が存在し，かつ位相のずれを除いて一様収束の位相で指数漸近安定である．　□

双安定型は上の命題の意味において構造安定な系であるといえる．さて0と1をつなぐフロント解の速度選択の問題を $b\to 0$ とするときの $-b$ と1をつなぐ双安定系のフロント解の極限として特徴づけようというのが，ここでの目的である(図3.5)．次が成り立つ．

定理3.12　$\lim_{b\to 0} c_b=2$　□

証明は2次元相平面解析によって行うが，ここでは省略する．直観的には図3.5のポテンシャルをみれば，$u=-b$ のところに頂点ができ，したがって $u=1$ から出発して $u=0$ を通り過ぎちょうど $u=-b$ で止まるための摩擦係

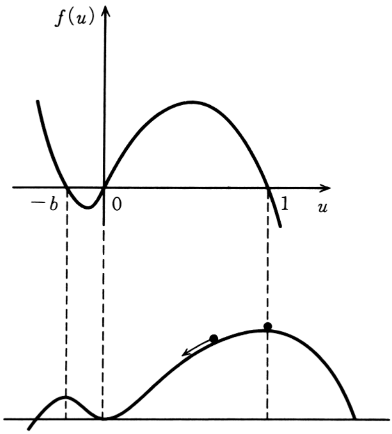


図 3.5　双安定系の極限としての速度選択

数 c_b が一意に決まり，よって $\lim_{b\to 0} c_b$ は 0 と 1 を結ぶ最小の摩擦係数，すなわち 2 であることがわかる．

以上では，フロント解の速度選択という特別な問題に対して構造安定な系の極限として退化した問題を見直すことを述べたが，この考えは他のパターン選択問題に対しても有効であろうと考えられる．

さて次節では，もとの Fisher–Kolmogorov 方程式にもどり，最小速度のフロントへ近づく理由をダイナミクスの観点から考えよう．

§3.4　臨界安定性仮説とその応用

臨界安定性仮説は不安定領域へ侵入していくフロント波の(速度とフロントの後に作られる波長に関する)パターン選択問題において有用な判定法を与える．それは単独のスカラー方程式から最大値原理が成り立たない一般の反応拡散系まで適用可能と考えられる．とりわけ**線形臨界安定性仮説**(LMS)は不安定領域での線形化方程式の分散関係式をみるだけでよく，実用的価値は高い．

しかし，非線形の効果が強くなれば，当然線形部分の寄与のみでは不十分

となり，LMS は破綻する．しかし臨界安定性の考え方は有効であり，**非線形臨界安定性仮説**(NMS)の領域に入る．しかし LMS のときのように選ばれる速度などが容易には計算できない．LMS から NMS への遷移はどのようなメカニズムでおこるかは LMS の限界を知る上でも重要である．

次項(a)においては，[250], [251]にしたがってパターン選択，とりわけ最小速度がなぜ選ばれるのかについての物理的直観を与える．さらに(b)においては LMS および NMS についてスカラー方程式を例にとりながら説明する．とくに LMS から NMS への遷移についての幾何的特徴付けを考える．

(a)　速度選択の物理的背景

遅い伝播速度が選択されるというのは一見，直観に反する．実際，伝播速度が速いものと遅いものが共存するとき，速い波は遅い波に追いつかれることはないし，遅い波が先行してもそれを速い波が追い越して，結局速い伝播速度で進んで行くように想像される．しかし実は自然な初期値から出発すればそうはならない．

図3.6のような結晶成長を考えてみよう．初期面(initial faset)は実線で書かれたものとし，ファセット A はファセット B よりゆっくり成長するとする．時間が経過すると点線のように，速く成長するファセット B は自ら消え

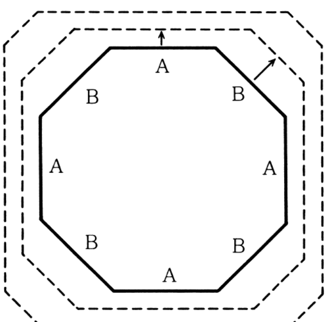


図3.6　ゆっくり成長するファセットが系を支配する

ていき，**最もゆっくり**成長するファセットが全体を支配することがわかる．ここで時間 Δt 後の成長面を決めるルールは，それぞれのファセットがその速度で成長するとして Δt 後の面を決め，その延長面の交わりでもって新しいファセット面とする．

不安定領域へ侵入するフロント波についても同様のことが生じる．いま不安定領域の近くにおいては成長率はほぼ一定と考えられる．そのとき勾配が緩やかであれば，その包絡面の伝播速度は速くなることに注意しよう(図3.7(b))．さて初期値としてコンパクト台をもつものをとろう．その波頭のあたりでは成長の速さは場所によらないとして図3.6のときと同様に波面をきめていくと速く進む包絡面と遅いそれとのクロスオーバーする点は図3.7(a)のように移っていくと考えられる(実際はクロスオーバーする付近も滑らかに変化する)．すなわち，ゆっくり伝播する領域が拡大していく．

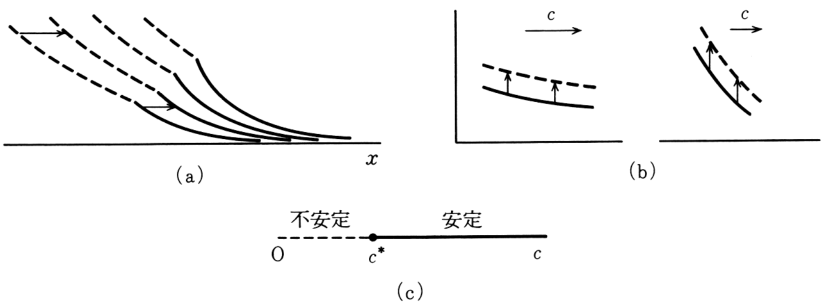


図3.7　(a)遅いフロント波と速いフロント波のクロスオーバー点の動き．(b)包絡面の伝播速度．(c)フロント波の速度と安定性(文献[250]の図3より転載)

いま，速度 c でパラメトライズされたフロント波が存在するならば，極端に遅いフロント波は不安定である．なぜなら不安定領域へ侵入する波を考えているので，それは拡散の力でただちに加速されてしまうからである．一方，ある一定の速度以上のフロント波は局所安定であると考えられるが，上に述べた議論から，その速度はスローダウンしてゆくであろう．

結果として，図3.7(c)のように安定領域の最小値の c^*，すなわち最も遅

い速度が選択されることになる．c^* は安定性が変わる**臨界安定点**(marginal stability point)となっているので，この選択則は**臨界安定性仮説**(marginal stability criterion)とよばれる．上である一定の速度以上のフロント波は安定であるといったが，これは一見スローダウンすることと矛盾する．その安定性の意味はそのフロント波に極めて近い特別なクラスの摂動に対するものであり，ここで考えている状況はそのクラスの外になるので問題はない(詳しくは§3.5参照).

(b)　線形および非線形臨界安定性仮説

臨界安定性仮説が注目されたのは単にパターン選択における重要な考え方の指針を与えるのみならず，実用的な判定法も与えるからである．とりわけ線形臨界安定性仮説(LMS)は限界もあるが，ある一定の範囲では簡便な選択則になっている．不安定領域に向かって波が進んで行くとき，その波頭付近では振幅がまだ大きくない．LMS とは波頭付近すなわち不安定領域での線形化方程式から得られる選択則が系全体のパターン選択を決定するというものである.

しかし，LMS が限界があるとはいえ解が有限振幅のところまで有効なのはなぜだろうか．FK 方程式をはじめ，これまで考えてきたのは安定定数状態が不安定定数状態へ侵入する波であり，その結果，1 パラメータ族の伝播波の存在が導かれた．いま，選択されるべきフロント波の近くでのダイナミクスを考えると，その center-unstable 方向の固有モードが存在するであろう．そしてその固有モードの主要部は安定領域にはなく波頭部分に集中していると予想されるので，系全体のダイナミクスは波頭部分のそれに十分近いと考えられる．速度が一意に選択される双安定系(命題 3.11 参照)ではまったく様子が異なり，真にその非線形性に依存しているため，系の一部を見るだけではその速度はわからない.

不安定な定数領域(簡単のため，0 とする)での小さな摂動の時間発展は分散関係式から決定されると考えられる．すなわち，摂動 $\psi \sim e^{-i\omega t + ikx}$ を仮定し，それを 0 での線形化方程式

(3.42)
$$\psi_t = L\psi$$
に代入し，ω を k の関数として表した分散関係式

(3.43)
$$\omega = \omega(k)$$
によって，(3.42)のダイナミクスは決まる．ここで ω, k は一般に複素数とし，以下の議論では(3.43)の存在も仮定する．

さて，どのような形と速度をもったものがダイナミクスを支配するのであろうか．$k^i \equiv \mathrm{Im}\, k$ は遠方での減衰のオーダーと包絡線の形を決め，$k^r \equiv \mathrm{Re}\, k$ はその包絡線内の波数を決めている．$\omega^i \equiv \mathrm{Im}\, \omega$ は時間的に減衰か増大かを，$\omega^r \equiv \mathrm{Re}\, \omega$ はその変動が時間的にどのように振動して(あるいは単調に)いくかを表している．いま k^i を固定し，増大度 ω^i を波数 k^r の関数として描くと，図3.8のようになるとする．

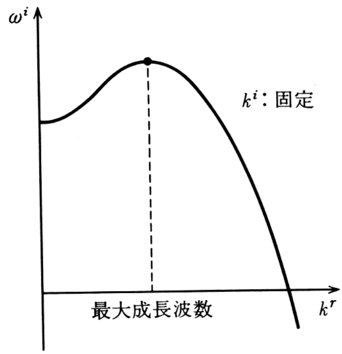


図3.8　波数–増大度関係

ダイナミクスを特徴づけるのは増大度最大のところ

(3.44)
$$\frac{\partial \omega^i}{\partial k^r} = 0 \quad かつ \quad \frac{\partial^2 \omega^i}{\partial (k^r)^2} < 0$$
である．これが一意に決まるならば，この関係により k^r を k^i の関数とみなせる．したがって，以下では k^i のみが独立に動くとする．この最大成長率をもつ波が進む**位相速度**

(3.45)
$$c = \frac{\omega^i}{k^i}$$

も k^i の関数 $c=c(k^i)$ と考えられる．

それは図 3.9 のようになると仮定しよう．$k^i\to 0$ のとき $c\to+\infty$ となるのはわれわれの仮定，すなわち定常状態 0 がある Fourier 波数 k_c（減衰のない，したがって $k^i=0$）に対して不安定($\omega^i>0$)であることからきている．速度の遅いものが支配的になっていくとすれば，結局，最小値を与える $\dfrac{\partial c}{\partial k^i}=0$（図 3.9 の k^{i*}）の速度が選択されることになる．すなわち，

$$\frac{\partial c}{\partial k^i}=\frac{1}{k^{i2}}\left(\frac{\partial\omega^i}{\partial k^i}k^i-\omega^i\right) \tag{3.46}$$

であるから，最小値が達成されるのは $\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^i}=\dfrac{\omega^i}{k^i}$ のところとなる．よって選択される速度 c^* は(3.44)を思い出せば，

$$c^*=\frac{\omega^i}{k^i}=\frac{\partial\omega^i}{\partial k^i},\quad \frac{\partial\omega^i}{\partial k^r}=0 \tag{3.47}$$

となり，これが**線形臨界安定性仮説**(linear marginal stability criterion)による選択速度 c^* とそこでの波数 k^* を決める関係式を与える．この仮説の意義はパターン選択に対し，極めて簡便な実用的判定法を与えることにある．

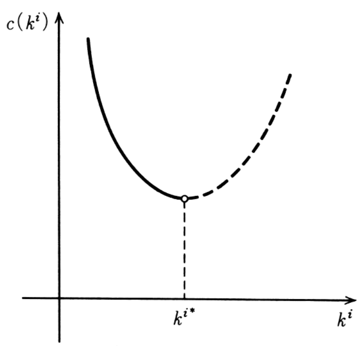


図 3.9　減衰オーダー–位相速度関係

さて条件(3.47)の LMS は直観的に何を意味しているのであろうか．また臨界安定性とはどのように関連しているのであろうか．実は，(3.47)の 2 つの条件はフロント波を含む界面伝播における基本的な 2 つの不安定性

（i）　**成長不安定性**(growth instability)

（ii）　**伝播不安定性**（propagating instability）

と密接に関係している．ある着目している波数 k_0 が摂動されて $k=k_0+\Delta k\ (\Delta k\in\mathbb{R})$ となるとき，$e^{-i\omega t}$ 部分の振幅の主要な変化は $e^{\frac{\partial\omega^i}{\partial k^r}\Delta kt}$ となり，$\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^r}\neq 0$ ならば Δk を $\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^r}\Delta k>0$ ととれば指数的に増大する（成長不安定性）．したがって

$$\frac{\partial\omega^i}{\partial k^r}=0$$

は臨界安定条件となる．

一方，伝播不安定性の方はフロントに小さな局在化した摂動を与えたときの不安定性であるが，これは**群速度**（group velocity）$c_g(k)=\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^i}$ で伝播して行くと考えられる．これに対し，**位相速度**（phase velocity）は $c_{ph}(k)=\dfrac{\omega^i}{k^i}$ である．もし $c_{ph}<c_g$ ならば摂動がフロントより先に不安定領域に伝わり，不安定化をおこす．$c_{ph}>c_g$ ならばフロントが摂動を追い越し，c_{ph} の進行波座標で見る限り，（遠方で適当な重みをつけた空間で）安定と考えられる．したがって $c_{ph}=c_g$ は，このクラスの摂動に対して臨界安定となっている．

§3.3 で取り扱った Fisher–Kolmogorov 方程式(3.32)に対し LMS を適用してみよう．$u=0$ での線形化方程式は

(3.48)
$$\psi_t=\psi_{xx}+\psi$$

ゆえ，分散関係式(3.43)は

(3.49)
$$\omega=i-ik^2$$

となる．条件(3.47)の $\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^r}=0$ より $k^r=0$ を得る．また，$\dfrac{\omega^i}{k^i}=\dfrac{\partial\omega^i}{\partial k^i}\ (=c^*)$ より $c^*=2$ となり，これは§3.3（定理 3.7，注意 3.8 参照）での厳密な結果と一致する．FK 方程式は決して線形化方程式(3.48)に微小摂動が加わったものではなく，フロント解自身も 0 と 1 を結ぶ有限振幅解であるにもかかわらず LMS 条件だけで速度が決定されることは驚くべきことである．

これは全体のダイナミクスを支配する固有モードの主要部が波頭付近に集中することにより，実質的に不安定定数状態での線形化方程式の分散関係に帰着されるという一種の縮約がおこっていると考えられるが，この見方による厳密証明はまだない．

このLMSもむろん限界がある．とくに非線形効果が強くなるとそこから先は**非線形臨界安定性仮説**(nonlinear marginal stability criterion)の領域となる．それを具体的に見るために，次のBen-Jacobら[17]によって提出された方程式を考えよう．

$$u_t = u_{xx} + f_b(u) \tag{3.50}$$

$$f_b(u) = \frac{u}{b}(1-u)(b+u) \quad (b>0) \tag{3.51}$$

これは定性的には(3.32)とほぼ同じものであるが，bが小さくなると非線形性は強くなる．しかし$u=0$での線形化方程式はbに依存しない．したがって$u=0$と$u=1$を結ぶフロント解のLMSによって得られる選択速度は上と同じ計算により$c^*=2$となりbによらない．

選択される速度が$c^*=2$というのはbによらず常に正しいのであろうか．実際，[8], [9]によるc^*の特徴づけより，$u\in(0,1)$で非線形項が上に凸となる$b\geqq 1$においては，$c^*=2$と一意にきまり，同時に，これはLMSによる選択速度と一致する(図3.10)．しかし$0<b<1$においては，より精密な考察が必要であり，直ちに選択される速度はわからない．

これを考えるのに(3.50)は，まず次の特殊解をもつことに注意する．

$$c = c_b = (2b)^{\frac{1}{2}} + (2b)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.52}$$

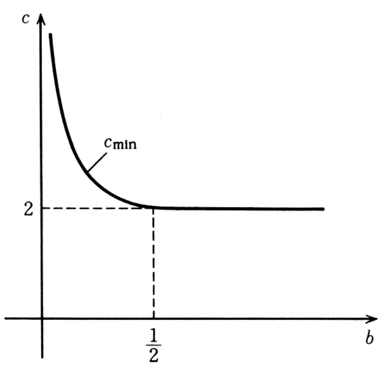


図3.10　非線形性の強さと選択速度

$$u_c(x) = \frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{q(x-ct)}{2}\right) \tag{3.53}$$

$$q = \begin{cases} q_1, & b \geqq 1/2 \\ q_2, & 0<b<1/2 \end{cases} \tag{3.54}$$

ここで

$$q_1 = \frac{c}{2} - \left[\frac{c^2}{4}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

$$q_2 = \frac{c}{2} + \left[\frac{c^2}{4}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.56}$$

である．これは直接，代入することにより確かめられる．

定理3.7の結果は，正値な範囲で見て最小速度をもつフロント波が選択されるということであった．上の(3.50)を$0 \leqq u \leqq 1$の範囲で考えたとき，最小速度はbのどのような関数となっているのであろうか．

命題3.13　方程式(3.50)の正値なフロント解の最小速度は

$$c_{\min} = \begin{cases} 2, & b \geqq 1/2 \\ c_b = (2b)^{\frac{1}{2}}+(2b)^{-\frac{1}{2}}, & 0<b<1/2 \end{cases}$$

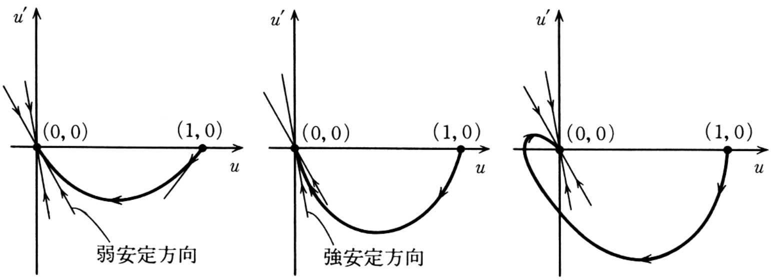
で与えられる．したがって同時にこれが選択速度となる(図3.10参照)．　□

上で求めた特殊解は最小速度を与えるものとなっている．命題3.13からわかるように，$0<b<1/2$においては選択される速度はLMSから決まる$c^*=2$ではなく，それより大きくなる．しかも$\lim_{b\to 0} c_b = +\infty$であり，LMSは非線形性が強くなるところでは破綻している．しかし次節で述べるように，$0<b<1/2$においても**臨界安定**(marginal stability)であることは成立している．すなわち，速度がc_bより大きければ安定であり，小さければ不安定となり，速度c_bのフロントは安定なものの最小速度となっている．この意味で$0<b<1/2$の領域は**非線形臨界安定性仮説**が成り立っているとよぶにふさわしい．

命題3.13の証明は，実は次に述べる臨界安定のc_bの幾何的特徴づけから

直ちに従う．この幾何的情報は次節の安定性の検証においても本質的な役割を果たす．

定理 3.14　方程式(3.50)のフロント解(3.53)は臨界速度 $c=c_b\ (0<b<1/2)$ のところ，また，そこでのみ安定結節点 $(0,0)$ へ**強安定**(strongly-stable)な方向から入る．$c \geqq c_b$ では解は単調であるが，$c<c_b$ では非単調となり，正値性も破れる．実際，対応する軌道は c と共に図 3.11 のように変化する．□



(a) $c>c_b$　(b) $c=c_b$　(c) $c<c_b$

図 3.11　非線形臨界安定軌道の振舞い$(0<b<1/2)$

$c=c_b$ の 1 点において，$(1,0)$ の不安定多様体は $(0,0)$ へ強安定な方向から入る．

［証明］　あらすじのみを述べる．(3.50)を(3.41)のようにかき直すと，フロント解は $(1,0)$ と $(0,0)$ をつなぐ 2 次元平面でのヘテロクリニック軌道となる．平衡点 $(0,0)$ での線形化固有値は(3.55)，(3.56)(ただし，符号は反対)であり，したがって $c=2$ を境に安定結節点$(c \geqq 2)$および安定渦状点$(c<2)$となる．これは b にはよらない．b を変えると変化するのは鞍状点 $(1,0)$ から出る 1 次元不安定多様体の振舞いである．

一言でいえば，b が小さくなり非線形性が強くなると，この不安定多様体は下にふくらみ，したがって，正値性を保って $(0,0)$ へ収束させるにはより大きな摩擦係数 c をとる必要がある．$(0,0)$ は $c<2$ では安定渦状点となるので，正値なフロント解を考える限り $c \geqq 2$ の場合のみ考えればよい．$c>2$ では $(0,0)$ へ入る 2 つの固有方向のうち，強安定(すなわち固有値の絶対値が大きい方に対応する)な方向から入るものは 1 本だけである(図 3.11(b))．

$(1,0)$ から出発した不安定多様体が $(0,0)$ へ収束するとき，そのフロント解の正値性(および単調性)が破れるのは 2 つの仕方がある．1 つはすでに述べたように $(0,0)$ が $c<2$ で渦状点になってしまう場合であり，もう 1 つは $(0,0)$ は結節点のままであるが軌道が大きくふくらみ，強安定な方向も越えて，反対側(負の)の弱安定(weakly-stable)方向に沿って $(0,0)$ へ収束する場合である(図 3.11(c))．

(b,c) の値に応じて，どちらの場合が先に起きるかにより，LMS と NMS の違いが生じる．実際 $b>1/2$ では非線形性が強くないので c を小さくしていくと前者が必ず先に起きるのである．一方，$0<b<1/2$ では逆にある $c_b(>2)$ のところで $(1,0)$ の不安定多様体は図 3.11 のように $(0,0)$ の強安定な方向に沿って収束する．c がこの c_b より小さくなるとオーバーシュートしてしまい，軌道は反対側の弱安定な方向に沿って入り，正値性と単調性は破れてしまう． ∎

注意 3.15 NMS で選択される解が幾何的には強安定な方向(2 次元では唯一の方向)から入るものであるという特徴づけは重要である．なぜなら，より一般の方程式系で現れる NMS の幾何的特徴づけにもなり得ると考えられるからである([243]参照)．

注意 3.16 速度選択問題における LMS および NMS の有用性は，第 2 章で取り扱った複素振幅方程式，Swift–Hohenberg 方程式をはじめ多くの方程式に対し，少なくとも数値的には検証されている([69], [67], [68], [250], [251], [17]など参照)．これらに対する数学理論，とりわけ幾何的特徴づけを伴うものはまだほとんどなく今後の課題として残っている．

§3.5 臨界安定性仮説の検証

前節で取り扱った方程式(3.50)のフロント解の速度選択に関して，臨界安定性仮説が実際に成り立っていることを確かめよう．

§3.3 で見たように正値解(もしくは単調解)の範囲で**最小速度**の進行波が選択されるわけであるが，その証明は比較原理に負っており，より一般の場

合にも適用できる別の選択原理が必要とされる．ここでは正値な(あるいは単調な)フロント解という条件をはずして，すべての進行波解を考える．選択されるものはその族の中でちょうど**安定性が変わる**(臨界安定な)ところの解であることを示そう．これは§3.2の結晶成長のところでも現れた考えであるが，ここでは(3.50)に対して厳密に調べる．この章の最初に述べたように，安定性はどのような摂動を考え，それをどのように測るのかを明確にしなければ意味をなさない．実際，自然と思われる通常の摂動に対してフロント解はすべて不安定となる．

定理 3.17　(3.50)の0と1を結ぶすべてのフロント解は，$L^p(\mathbb{R})$, $C_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$ のどの空間の摂動に対しても不安定である．

［証明］　連続スペクトルが正の部分にくることを示そう．次の補題が鍵となる(証明は例えば[124]を見よ)． ∎

補題 3.18　$\mathbb{R}$ 上での線形作用素

(3.57) $$Lu = u_{xx}+a(x)u_x+b(x)u$$

(3.58) $$\lim_{x\to\pm\infty} a(x) = a_\pm, \quad \lim_{x\to\pm\infty} b(x) = b_\pm$$

を考える．どの空間で考えても，L の連続スペクトルは次の放物領域に含まれる．

(3.59) $$\sigma_e(L) \subset \left\{\lambda\in\mathbb{C}\;\middle|\;\mathrm{Re}\,\lambda \leqq -\frac{(\mathrm{Im}\,\lambda)^2}{a_\pm^2}+b_\pm\right\}$$

$a_\pm=0$ のとき，右辺の集合は半無限区間 $(-\infty, b_\pm]$ でおきかえる．とくに

(3.60) $$\max\mathrm{Re}\,\sigma_e(L) = \max(b_+, b_-)$$

となる．

［証明］　$f_b'(0)=1$ (b によらない)ゆえ，上の補題より，どの空間で考えても

(3.61) $$\max\mathrm{Re}\,\sigma_e(L) = 1$$

となる．ここで L は進行波座標で見たときの(3.50)のフロント解での線形化作用素である．よって，[124]の系5.1.6よりフロント解は不安定となる． ∎

フロント解がすべて不安定であることは，次のように考えるとわかりやす

い.

いま，(3.50)の速度 c をもつフロント解 $u_c(x,t)=v_c(x-ct)$ ($v_c(+\infty)=0$, $v_c(-\infty)=1$, $v_c>0$) をとる．1パラメータ族でフロント解は存在するから，c に近いある $c'\,(>c)$ をとり，摂動として

$$u_{c'}(x,t)-u_c(x,t) \tag{3.62}$$

をとる．フロント解は $\pm\infty$ では指数的に 0 および 1 に収束するから，c' を c に近くとれば $t=0$ で，この摂動は上の定理のどの空間であれ，いくらでも小さくできる．しかし $c'-c>0$ ゆえ，速度 c で動く進行波座標で見ると時間が経てば位相がずれ，どのノルムで見ても摂動は前方へ広がりながら増大していく．これはまさに§3.4(b)で述べた伝播不安定性そのものである．すなわち，連続スペクトルのもたらす不安定性は伝播不安定性である．

この結果は双安定系の場合(命題 3.11 参照)と比べて大きな違いである．その理由は，いま考えている進行波解は不安定領域 $u\equiv 0$ の中へ進んで行く波であり，したがって，その方向への摂動は強い制限をおかない限り，すぐに増大することによる．すなわち，かなり狭い範囲の摂動のクラスで問題を考えなければならない．

これは一見，不自然に思えるが，問題の由来を思い起こせばそうでもないことがわかる．実際，自然な問題の設定の一つは温度や濃度が急激に変わり(クエンチされ)，系が一挙に不安定状態に落されたときに，小さなゆらぎがどのように広がって行くか，というものである．このときの摂動は局所化したコンパクト台のものが自然である．また樹枝状結晶の場合においても摂動としては進行波座標に乗ってみたときに先端付近に局在化したものが自然である．実際，遠方まで一様に測るノルムでは樹枝状結晶は不安定である．

さて，連続スペクトルがもたらす伝播不安定性を排除するために，次の重み付き空間を導入しよう．

$$L^p_w(\mathbb{R})=\left\{v\;\middle|\;\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{v(x)}{w(x)}\right|^p dx\right)^{1/p}<+\infty\right\},\quad 1\leqq p\leqq\infty \tag{3.63}$$

$$w(x)>0,\quad \frac{w'(x)}{w(x)}\to\mu,\quad \frac{w''(x)}{w(x)}\to\mu^2,\quad x\to+\infty \tag{3.64}$$

ここで，μ は $\mu^2+c\mu+1<0$ をみたすような任意の μ である．また $w(x)$ は $x\to-\infty$ で一様有界な滑らかな関数とする．われわれは不安定領域へ拡大していく伝播不安定性を抑制したいので，重みは $x\to+\infty$ 方向にのみつけられていることに注意しよう．このとき次が成り立つ．

定理 3.19 命題 3.13 で与えられる $c_{\min}$ に対し，$c>c_{\min}$ $(c<c_{\min})$ であれば，フロント解は重み付き空間 L^p_w において漸近安定(不安定)である． □

注意 3.20 上の安定性は位相のずれを除いて指数漸近安定である．このような重み付き空間による安定化は[257], [258]による．

［証明］ まず重みを適当にとれば連続スペクトルの不安定性は取り除けることをみよう．補題 3.18 と同様にして，重み付き空間での連続スペクトルの位置を調べると，$c^2>4$ ならば

$$\max \operatorname{Re} \sigma_e(L_w) = \mu^2+c\mu+1 \tag{3.65}$$

となる(詳しくは[124]の第5章参照)．ここで $L_w v \equiv \dfrac{1}{w}L(wv)$ である．μ を $\mu^2+c\mu+1<0$ をみたすように μ をとれば，連続スペクトルを左半平面へ押し戻すことができる．実際，$c^2>4$ であるので，そのような μ をとることができる．

このときの重み $w=w_\mu(x)$ の $+\infty$ での減衰の速さは相平面での安定結節点 $(0,0)$ の2つの実固有値が $\mu^2+c\mu+1=0$ の2つの解であることに注意すれば，ちょうどこの結節点へ指数的に近づく2つの速さの間になる．したがって μ のとり方に関係なく $c\to2$ のとき，連続スペクトルの右端は原点に近づき，$c<2$ では右半平面に出てしまう．よって $c<2$ では重みをどのようにとっても，不安定となる．これはある程度速度が大きくないと，すなわち $c^2>4$ でないと連続スペクトルを安定化することはできないことを示しているが，なぜ速度が遅いと不安定になるのであろうか．

それには次の事実を思い起こすとよい．いま，ある摂動が

$$e^{\Omega t-\gamma x} \quad (\Omega>0,\ \gamma>0) \tag{3.66}$$

の形で増大していくとする．これを速度 $c\,(>0)$ の進行波座標系 $\xi=x-ct$ で見ると

(3.67)
$$e^{\Omega t - \gamma(\xi + ct)}$$

となる．固定した点 x で見ると指数的に増大していたものが進行波座標系に乗って固定した ξ で見ると

(3.68)
$$c > \frac{\Omega}{\gamma}$$

という条件をみたせば減衰することがわかる．これはコンパクト区間上で比べてもおなじである．フロント解が摂動を受けたとしても，それが増大する前に追い越してしまえばフロントの波頭付近は形を保つことができる．むろん波頭から大きく離れたところでは摂動は増大しているわけであるが，これは適当な重みをかけておけば小さいとみなせる．これが，速度が一定以上速ければ重みをつけた動座標系でみると安定性が得られる直観的理由である．

さて次に離散スペクトルの挙動を調べよう．次を示す．

補題 3.21　$c > c_{\min}$ のフロント解での線形化固有値問題の離散固有値は平行移動からくる単純 0-固有値を除いてすべて実部は真に負である．

[証明]　重み w を $w(\xi) = e^{-c\xi/2}$ ととるならば，z から新しい変数 $v(\xi) = z(\xi)e^{-c\xi/2}$ についての線形化固有値問題は

(3.69)
$$L_w v = v'' + \left(-\frac{c^2}{4} + f'(\phi(\xi))\right)v = \lambda v$$

となる．$\phi(\xi)$ は着目しているフロント解である．これはもともとの考えている空間とは無関係に $L^2(\mathbb{R})$ の自己共役問題と考えられる．したがって離散固有値は実となる．最大固有値は変分的に次のように特徴づけられる．

(3.70)
$$\lambda = \max\left\{\int_{-\infty}^{\infty} -v'^2 + \left(-\frac{c^2}{4} + f'(\phi(\xi))\right)v^2 d\xi \,\middle|\, v \in H^1(\mathbb{R}),\ \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1\right\}$$

もし v がこれを達成する固有関数とすると，$|v|$ も同じ値を与えることから v は非負としてよい．さらに，ある点で $v(0)=0$, $v'(0)=0$ ならば $v \equiv 0$ となるので，真に正となる．$\lambda < 0$ を示すためにフロント解 $\phi(\xi)$ の微分 $\phi'(\xi)$ から定義される $\psi = \phi' e^{-c\xi/2}$ $(\psi > 0)$ は $\psi'' + (-c^2/4 + f'(\phi))\psi = 0$，すなわち 0-固有値に対応する固有関数であることに注意する．

主線形固有値 λ と対応する固有関数 $p(\xi)$ は，この ψ を用いて，部分積分より

$$\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{p}{\psi} \right) \right)^2 d\xi \tag{3.71}$$

をみたすことが確かめられる．これより $\lambda \leqq 0$ となるが，もし $\lambda = 0$ ならば，$p/\psi =$ 定数となり，p はフロント解の微分からきたものと一致してしまう．これより平行移動からくる 0-固有値以外の離散固有値は存在するとしても $\lambda < 0$ となり，$c > c_{\min}$ での安定性が証明された． ∎

さて次に，$0 < c < c_{\min}$ でのフロント解の不安定性を示そう．$b \geqq 1/2$ ならば $c_{\min} = 2$ なので，前述の議論より $c < c_{\min}$ では連続スペクトルが右半平面に出てくるので不安定となる．一方，$0 < b < 1/2$ においては $c_b > 2$ なので，選択速度 $c = c_b$ より小さくなっても連続スペクトルは左半平面にとどまる．そこで $c = c_b$ が臨界安定であることを示すために $c < c_b$ では正の離散固有値が存在することを示そう．

前と同様の手続きにより，自己共役問題(3.69)が得られ，したがって最大固有値は(3.70)で特徴づけられる．解の微分 $\phi'(\xi)$ から作られる $\psi = \phi' e^{-c\xi/2}$ は 0-固有値に対応する固有関数となるが，定理 3.14 より ϕ は単調でなく，すなわち ϕ' は少なくとも 1 つ非退化な零点をもつ．よって $\lambda = 0$ は最大固有値でなく $\lambda_{\max} > 0$ となる．以上より，$c = c_b$ において離散固有値は原点を横切ることがわかり，定理 3.19 の証明が終る． ∎

臨界速度をもつフロントの安定性

前節までの考察により，漸近速度の選択に関して(3.50)のような方程式に対しては，(正値，単調な)フロント解の中での最小速度選択則とすべてのフロント解を考えて安定性が変わる臨界安定性原理によるものの 2 つがあり，これらが一致することをみた．フロントの漸近的伝播速度が，これらの選択則によってきまる臨界速度になることはすでに定理 3.7 で述べた．その吸引領域は広く，例えば初期値 $u_0(x) \in [0,1]$ が $\liminf_{x \to -\infty} u_0(x) > 0$ かつ $x \geqq 0$ で $u_0(x) \equiv 0$ をみたせば十分であった([22]も参照)．しかし，この結果は本質的

に最大値原理に負っている．したがって未知関数が複素数値あるいはベクトル値になると，この方法は通用しない．そこで大域的な吸引性はともかくとして臨界安定なフロントの局所安定性について何がわかっているかを簡単に述べておこう．

臨界速度より大の場合($c > c_{\min}$)は前述の重み付き空間の導入によりスペクトルの分離が可能となり，その結果指数安定性を得た．しかし，臨界速度のフロント解においては，この分離は不可能となり，減衰の速さも以下に見るように多項式オーダーとなる．Kirchgässner([161])は，Fisher 型 $f(u) = u(1-u)$ に対し，巧みな変数変換により臨界フロントでの線形化方程式を Floquet 型の標準形に直し，それが生成する半群を調べ，臨界フロントへの $O(t^{-1/4})$ のオーダーの収束を示した．

一方，Bricmont と Kupiainen([25], [24])らは，(複素数値) Ginzburg–Landau 方程式のフロント解に対し，くり込み群の手法によりその安定性を証明した．また Gallay [107] は，これら 2 つのアイデアを組み合せた形で，次の単独方程式のクラス

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.72}$$

に対し，臨界フロントへの多項式オーダーの収束を示した．ここで F は多項式(または解析的)であり

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) > 0, \quad F'(1) < 0 \tag{3.73}$$
$$\text{および，すべての } u \in (0,1) \text{ に対し } F''(u) < 0$$

をみたすものとする．これは $u - u^3$ (Ginzburg–Landau 型)や $u - u^2$ (Fisher 型)を含む．さらに一般の方程式の臨界フロントの安定性に対しても第 2 章で述べたくり込み群は有効であると考えられ，今後の発展が期待される．

《要約》

3.1　パターン選択問題の意味を説明した．

3.2　樹枝状結晶を記述する最も簡単な幾何モデルを用いて，パターン選択が表面張力や異方性とどのように関わってきたか紹介した．

3.3　Fisher–Kolmogorov 方程式のフロント解における最小速度選択原理を構造安定系の極限系という立場からの説明を与えた．

3.4　最小速度選択原理の直観的説明を与えた．線形臨界安定性仮説の限界と非線形臨界安定性仮説の幾何的特徴づけを単独方程式を用いて説明した．

3.5　臨界安定性仮説が成立していることを単独方程式の場合に証明した．

4 パターン形成

なんらかのエネルギーや物質を消費しながら形作られる秩序というのが，最も広く解釈したパターンの意味である．ただし，それに対応する数学理論としてのパターン形成論が確立しているわけではない．むしろ現時点では，さまざまな新しいダイナミクスがつぎつぎと発見され，水平方向の地平が広がりつつあり，一方，それらを貫く普遍的な垂直軸としての数理構造はこれからの課題として残っている．しかしそれにもかかわらず，それらは多くの実り多い方法論のきっかけを与えてきた．分岐理論，特異摂動論は解を構成的に作るのに極めて有効であり，さまざまな漸近理論や無限次元力学系の考え方は系が最終的にどのように振る舞うかについて多くのことを教えてくれる．この章と次章においてその一端を紹介し，またスケーリングの立場から高次元パターンについてどのようなことがいえるかについても議論する．

§4.1 パターン形成とは

Turing マシーンで有名な Turing は多彩な仕事を残したが，そのなかに反応と拡散の単純な組合せが Turing パターンとよばれる非一様な構造を自発的に形作るという結果がある．これは拡散という一様化への駆動力と考えられていたものが，反応と組み合されると空間非一様な秩序構造への推進力になるという逆の面をもつことを明らかにしたものである．しかし，当初，実

際の現象との関連は薄いと考えられた．ところが最近，これが化学反応系や形態形成におけるダイナミズムの本質をついていることが実験的にも明らかにされてきている．さらにその実体に依存しない普遍性が，多様かつ階層的な非線形現象を理解するうえで極めて重要となってきている．

そのモデル方程式として最もよく知られているのが反応拡散方程式系とよばれている半線形放物型方程式系である．そこにおける反応の非線形ダイナミクスの特徴の一つは，自己増殖性とそれを押える抑制効果の拮抗である．大都市の人口，ウイルスの増大は一旦きっかけが与えられると，急激に増大し始めるが，やがて一定サイズに落ち着くかあるいは振動したり壊滅したりする．これは有限性からくる食糧の枯渇あるいは免疫系が働き出したりすることによる抑制がきくからである．

もう一つは，拡散による空間的伝播である．これを理解するにはインフルエンザの伝播や燃焼(あるいは野焼き)を思い浮かべればよい．これには3つの異なる状態がある．インフルエンザにかかっていない人(未燃焼状態)，かかっている人(燃焼中)，そして治った人(燃焼後)である．空間的伝播の様子を知るには，上の3つの状態をすべて知る必要はない．かかっている人，あるいは燃焼面の挙動がわかればよい．これは自然に界面ダイナミクスの考えにつながる．すなわち急激に状態が変化する内部遷移層(界面)の動きのみを記述すればよい．これはもとのモデルの大幅な縮約となると同時に内在するダイナミクスの本質が露わになるという特徴をもつ．

このアイデアの応用は広く，古典的な結晶成長や燃焼問題から数理生態学まで，なんらかの意味で2つ以上の異なる状態の遷移を記述するときに有効になると言って過言でない．このような界面運動への帰着という特異極限を考える際は時空間のリスケーリングを行うことになるが，意味のある極限を得るためには，界面の運動に関わるいくつかの力のバランスを考えなければならなくなる．どのようなバランスを採用するかにより，さまざまな特異極限系とスケール則が得られる．

この章における目標は，反応拡散系のもつ典型的なパターンの存在とそのダイナミクスを主として上のような漸近的手法によって明らかにすることで

ある.

§4.2 勾配系とそのダイナミクス

ある汎関数(自由エネルギー)が存在して，状態はそのエネルギーが最も速やかに減る方向に変化してゆくという考えは古くからあり，自然である．また，そのいきつく先はエネルギー極小値のところで留まるだろうと考えられる．常微分方程式における Lyapunov 関数を用いて安定性を調べるのがしばしば有効であるのは，このことが背景にある.

空間的広がりをもつ系においては，まわりとの相互作用は空間微分で表現されることが多い(例えば勾配に比例して，物質や熱が流れる)．単純ではあるが典型的な例として，次の van der Waals 型の汎関数がある.

$$F_\epsilon(u) = \int_\Omega \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + W(u)dx \tag{4.1}$$

ここで，Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな有界領域とする．$W(u)$ は 2 重井戸型ポテンシャルとよばれるものであり，典型的には図 4.1 のように 4 次関数 $W(u)=(u^2-1)^2/4$ で表される.

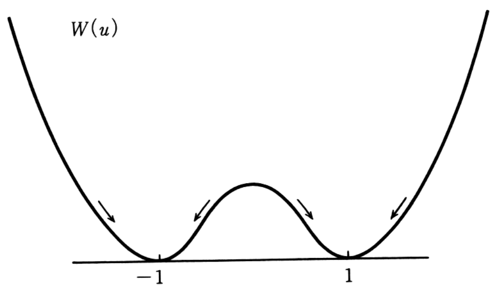


図 4.1 2 重井戸型ポテンシャル

$L^2(\Omega)$ を基礎空間とし，$H^1(\Omega)$ を許容関数にとろう．この汎関数を小さくするには各点でポテンシャルの底の ± 1 のどちらかをとり，空間方向には勾配を減らすのが望ましい．したがって，u に制限がなければ 2 つの定数状態

±1が最小値を与えると考えられ，それにいたるダイナミクスは項(b)で述べる単独双安定反応拡散方程式により記述される．一方，2相合金の相分離などのように保存則が課されるような場合は項(c)で扱うCahn–Hilliard方程式を考えることになる．また，そのときは汎関数の**最小解**(minimizer)は非定数であり，その界面の形状の幾何的特徴づけが興味ある問題となる．

さらに近年，項(d)で述べるような(4.1)に非局所項が加わった新しい型の変分問題やそのダイナミクスが注目を集めている．微細構造(fine structure)をもつ最小解など，局所性と大域性がからみ合った興味ある解が出現する．実は，これらはすべて無限次元空間における勾配系と考えられるので，その見方をまず次項で簡単に述べておこう．

(a)　勾配系の大域アトラクター

常微分方程式の定性的理論から始まった力学系理論は多様な展開を見せ，ここ数十年は無限次元空間での発展も著しい．遅れを伴う関数微分方程式や散逸系のモデル方程式の研究は，そこにおける大きな原動力となった．真に系を支配する自由度は何かを考える際にエネルギーや情報を散逸しながら発展する系は格好の材料を与える．

そこから取り出された重要な概念の一つに**大域アトラクター**(global attractor)がある．これは多くの場合有限次元となり，その構造が知られれば系の漸近的な振舞いはそれで決定されてしまうというものである．これはもとのダイナミクスの大幅な縮約となっている．この大域アトラクター上の問題に帰着するという考えは非線形問題において「解かずして解く」という定性的アプローチの一典型例でもある．なおこの節は主に[117]によった．

定義4.1（**大域アトラクター**）　$T(t)$ をBanach空間 X 上の C^r-半群($r \geqq 0$)とする．その不変集合 A が**大域アトラクター**であるとは，それが極大コンパクト不変集合であり，かつ任意の有界集合 $B \subset X$ に対し $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(T(t)B, A) = 0$（これを $T(t)$ は B をアトラクトするという）となるときをいう．　□

注意4.2　定義から明らかに ω-極限集合 $\omega(B)$ はコンパクトであり A に属する．

以下，この節で考える空間 X は Banach 空間とし，半群はすべて強連続な C^r-半群のみ考えるとする．さて上のような大域アトラクターがいつ存在するかについては次の 2 つの言葉を準備しておくのが便利である．

$T(t)$ が**漸近的に滑らか**(asymptotically smooth)であるとは，$T(t)B\subset B$ であるような任意の空でない有界閉集合 B に対し，あるコンパクト集合 $J\subset B$ がとれて J が B をアトラクトするときをいう．また $T(t)$ が**点散逸的**(point dissipative)であるとは，ある有界集合 $B\subset X$ が存在して，それが X の各点をアトラクトするときをいう．

また，$x\in X$ を通る正軌道 $\gamma^+(x)$ は $\gamma^+(x)=\{T(t)x,\ t\geqq 0\}$ で定義される．負軌道 $\gamma^-(x)$ は $T(t)$ の値域が X 全体でも必ずしもなく，また 1 対 1 とも限らないので，次のような和集合で定義する

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t\geqq 0} H(t,x) \tag{4.2}$$

$$H(t,x) = \{y\in X \mid\ x\text{ を通るある軌道 }\phi : (-\infty, 0]\to X\text{ が存在し }\phi(0)=x\text{ かつ }\phi(-t)=y\text{ をみたす}\}$$

定理 4.3 $T(t):X\to X,\ t\geqq 0$ が漸近的に滑らか，かつ点散逸的とし，さらに有界集合の軌道が有界にとどまるならば，連結な大域アトラクター A が存在する． □

定理 4.4 $T(t)\colon X\to X$ が $t>0$ で完全連続であり，点散逸的とすると連結な大域アトラクター A が存在する．またこのとき A の中に平衡解が存在する． □

これらは一見抽象的な定理にみえるが，以下に述べる勾配系というクラスに限定すれば A はかなり具体的にかける．その際，平衡解の**双曲性**という条件が必要となる(平衡解 x すなわち $T(t)x=x,\ \forall t\in\mathbb{R}$, が双曲的であるとは，スペクトル $\sigma(DT(t)(x))$ が複素平面で単位円と交わらないことである)．

定義 4.5 (**勾配系**) C^r-半群 $T(t)\colon X\to X,\ t\geqq 0,\ r\geqq 1$ が**勾配系**(gradient system)であるとは，次がみたされるときをいう．

(i) 有界な正軌道はプレコンパクトである．

(ii) 連続な Lyapunov 汎関数 $V\colon X\to\mathbb{R}$ が存在し，次をみたす．

（a）　$V(x)$ は下に有界である.

（b）　$\lim_{|x|\to+\infty} V(x)=+\infty$

（c）　各 $x\in X$ に対し，$V(T(t)x)$ は非増加である.

（d）　もし $T(t)x$ がすべての $t\in\mathbb{R}$ に対して定義され，$V(T(t)x)=V(x)$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ ならば，x は平衡解(定常解)である. □

E を $T(t)$ の平衡解の集合としよう. 次が成り立つ.

補題 4.6　$T(t)$ を勾配系とするとき，各 $x\in X$ に対し，その ω-極限集合 $\omega(x)$ は E に属する. もし x を通る負軌道 $\gamma^-(x)$ がプレコンパクトであるならば x の α-極限集合 $\alpha(x)$ も E に属する. □

この勾配系に対して大域アトラクターの存在は次のようにいえる.

定理 4.7　$T(t)\,(t\geqq 0)$ を勾配系とし，それが漸近的に滑らか，かつ E が有界ならば，それは連結な大域アトラクター A をもつ. このとき

$$A=W^u(E):=\{y\in X \mid T(-t)y\text{ は }t\geqq 0\text{ で定義され，}\ t\to+\infty\text{ のとき }T(-t)y\to E\} \tag{4.3}$$

とかける. さらに E の各要素が双曲的であるならば，E は有限集合となり

$$A=\bigcup_{x\in E} W^u(x) \tag{4.4}$$

となる.

［証明］　点散逸であることは補題 4.6 および E の有界性より明らかである. また汎関数 V の性質より有界集合の軌道は有界にとどまる. 定理 4.3 を用いれば連結な大域アトラクターの存在がいえる. $A=W^u(E)$ を示すには，まず A の各点 x を通る軌道は大域的に定義され，とくに $\gamma^-(x)$ はプレコンパクトになる. したがって補題 4.6 より，その α-極限集合 $\alpha(x)$ は E に属する. したがって $A\subset W^u(E)$ である. 逆向きは明らかであろう. もし E の各元が双曲的であるならば，A のコンパクト性より E は有限集合となり $A=\bigcup_{x\in E} W^u(x)$ がわかる. ∎

$T(t)$ が完全連続ならば漸近的な滑らかさがみたされるので，次を得る.

定理 4.8　$T(t)\,(t\geqq 0)$ を勾配系とする. $T(t)$ が完全連続かつ E が有界な

らば，定理 4.7 の結論が成り立つ． □

流れが偏微分作用素で定義される場合は，その定義域は空間全体 X をとることは普通できない．したがって，上に述べた諸結果を適用するには問題に応じたある空間を設定し，その上で解作用素 $T(t)$ が C^r-半群をなすことを示す必要がある．幸い散逸系で現れる方程式系はその線形部分が**セクトリアル作用素**(sectorial operator)とよばれるものになり，その結果得られる解析的半群を用いて C^r-半群となる解作用素を生成することができる(詳細は[124])．その最も単純ではあるが典型的な例を次項で見よう．

(b) 非保存型勾配系

単独双安定反応拡散方程式

汎関数(4.1)において ± 1 がスピンが上向きか下向きか，液相か固相か，あるいは酸化状態か還元状態かを表しているならば，u の値のとり方には制限がなく定数状態 ± 1 がその最小値を与える．したがって，主な興味はそこに至るダイナミクスであり，それは $L^2(\Omega)$ での勾配系である次の Euler–Lagrange 方程式で与えられる．

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(u) \quad (\Omega \text{ において}), \quad f = -W'(u) \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (\partial\Omega \text{ 上}) \end{aligned}$$

2 階の拡散項がなければ，系は ± 1 のどちらかに(原点から出発した場合を除いて)収束する双安定性を示すので，これは非保存型の**単独双安定反応拡散方程式**(あるいは Allen–Cahn 方程式)とよばれ，パターン形成理論における基礎方程式の一つである．

ここでは前節で準備した力学系の考え方を境界条件を Dirichlet 条件に変えた次の空間 1 次元の問題に適用してみよう(簡単のため，$\epsilon = 1$ とした)．

$$(4.6)\qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) & 0 < x < 1 \\ u = 0 & x = 0, 1 \end{cases}$$

ここで $f(u) = u - u^3$ である．

注意 4.9　上においては Dirichlet 条件を採用し，$f(u)$ も 3 次関数であるが，Neumann 条件の場合を含む，より一般の境界条件および非線形性に対しても，以下の方法は同様に適用することができる([117]).

(4.6)を無限次元空間での発展方程式とみて前節の結果を適用していこう．まず時間大域的に C^1-半群 $T(t)$ を定義するために基礎空間として $X=L^2(0,1)$ とし，$A\equiv -\dfrac{d^2}{dx^2}$ の定義域を $D(A)=H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1)$ とすると，A は正定値自己共役作用素となり，かつコンパクトなレゾルベントをもつセクトリアル作用素となる．$X^{1/2}\equiv D(A^{1/2})=H_0^1(0,1)$ とかくと，非線形写像 f は $X^{1/2}\to X$ とみて C^1-写像となる．したがって定数変化法を用いて，(4.6)は $X^{1/2}$ 上の局所 C^1-半群を生成することは容易にわかる.

時間大域的な C^1-半群 $T(t)$ となることは，次のエネルギー汎関数 V の存在および非線形性 f が飽和型($\overline{\lim}_{|u|\to\infty} f(u)/u \leqq 0$)であることよりわかる．実際

$$V(\phi)=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\phi_x^2(x)+W(\phi(x))\right\}dx,\quad W(u)=-\int^u f(s)ds \tag{4.7}$$

と定義すれば

$$\frac{d}{dt}V(u(t,\cdot))=-\int_0^1 u_t^2dx\leqq 0$$

となり，(4.6)の生成する C^1-半群 $T(t)$ は $X^{1/2}$ 上の勾配系となる．また $T(t)$ は $t>0$ で完全連続となるので，もし E の各元が双曲的ならば定理 4.7 よりその大域アトラクター $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}=\bigcup_{\phi\in E} W^u(\phi)$ とかける．さらに今の場合，$\mathcal{A}$ の構造はより詳しくわかる．それは次の結果があるからである.

命題 4.10 (横断性) ([125], [6])　ϕ,ψ を(4.6)の双曲的な平衡点とするならば

$$W^u(\phi)\pitchfork W^s(\psi)$$

すなわち $W^u(\phi)$ は $W^s(\psi)$ に横断的に交わる.　□

この命題が導く一つの重要な結論は f が変化したときに**勾配系の大域アトラクター A の定性的変化は平衡解の双曲性が破れるとき，すなわちその局所分岐のみから生じる**ということである．すべての平衡解が双曲的でありつづけるならば A には何の変化も起こらないということである．このことは分岐理論を適用して A をより構成的に理解できることを意味する．すなわち(4.6)をパラメータ $\lambda(>0)$ 付きの次の問題でおきかえる．

$$
(4.8)\qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda^2 f(u) & 0 < x < 1 \\ u = 0 & x = 0, 1 \end{cases}
$$

λ が小さいと定数解 $u=0$ しか存在しないが，λ の増大と共に $u=0$ から次々と分岐解が生じ(図 4.2)，それらの不安定多様体によって A が作られる．

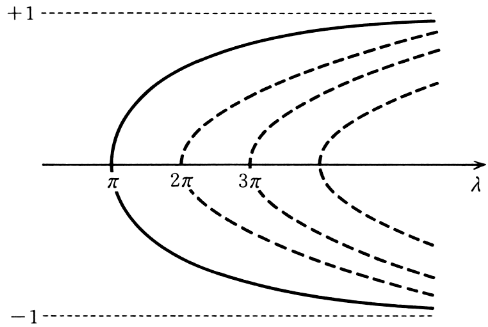


図 4.2　双安定単独反応拡散方程式の分岐図
Dirichlet 境界条件下では $\lambda=\pi$ から分岐する枝のみが安定となる．

実際次の定理が成り立つ．

定理 4.11 ([44], [124])　(4.8)において，もし $\lambda \in (n\pi, (n+1)\pi]$ (n は自然数)ならば，$(2n+1)$個の平衡点 $\phi_0=0$，ϕ_j^+，ϕ_j^- $(j=1,2,\cdots,n)$が存在し，$\phi_j^\pm$ はすべて双曲的であり，$\dim W^u(\phi_j^\pm)=j-1$ である$(j=1,2,\cdots,n)$．$\phi=0$ は $\lambda \in (n\pi, (n+1)\pi)$ の範囲で双曲的であり，$\dim W^u(0)=n$ となる．そして，大域アトラクター A_λ は次で与えられる．

$$A_\lambda = W^u(0) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} W^u(\phi_j^\pm) \right)$$ □

注意 4.12　(4.8)が $\lambda \in (n\pi, (n+1)\pi)$ で生成する半群 $T(t)$ は Morse–Smale 系(詳しくは[117])を成している.

注意 4.13　**空間非一様**な定常解で**安定**なものは $\lambda = \pi$ から分岐した枝のみである.

大域アトラクター A_λ 上の解のつながり具合は図 4.3 のように λ と共に複雑になっていくが，常に $u=0$ からの局所分岐のみ注目していればよい.

注意 4.14([195], [282], [118])　任意の軌道 ϕ に対し，$\omega(\phi)$ が E の**唯 1 点**から成ることが示せる.

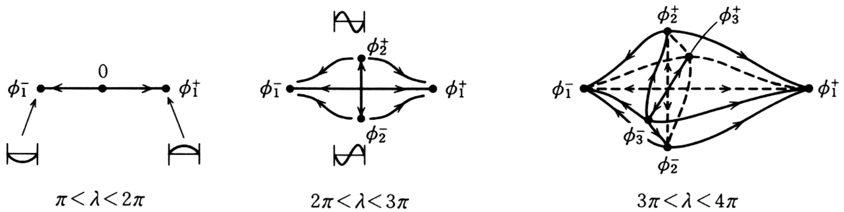


図 4.3　大域アトラクター

λ と共に大域アトラクターの次元は増大する．図 4.2 の分岐図と対応させて見るのがわかりやすい.

上の例では境界条件は Dirichlet 条件であり，注意 4.13 で述べたように安定な空間非一様定常解は $\lambda = \pi$ から分岐した枝のみであった．Neumann 境界条件で考えると，実はすべての非定数定常解は不安定となる([43], [196], [280]).

これは空間多次元においても実は正しい.

定理 4.15([42], [196])

$$(4.9) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ω が凸ならば，(4.9)の非定数定常解は不安定である． □

注意 4.16 ([196]) Ω が**非凸**であれば一般に上の定理は成立しない．すなわち，ある非凸な亜鈴型領域と適当な f を用いて，安定な非定数定常解を構成することができる．

方程式(4.9)に対しては最終状態は定数であり，したがってそこへ至る経緯がより興味あるものとなる．すなわち大域アトラクター上での運動の様子が問題となる．これは一般に困難な問題であるが，空間 1 次元かつ特異摂動系(すなわち拡散係数が極めて小さい)に対しては，§1.3 で述べた**超微速運動多様体**として特徴づけられる([41], [104])．これは後で述べる保存系の Cahn–Hilliard 方程式に対しても成り立つ([3], [4])．

特異摂動系においては不安定多様体に沿っての運動が定常解の平行移動で極めてよく近似できることが鍵となる．その結果得られる運動の速度は指数的に遅く，したがって超微速と名づけられている．しかし，遷移層どうしの合体消滅や境界付近での挙動は速い時間スケールが入ってくるので厳密な議論は難しくなる．しかし，基本的には図 4.3 の不安定多様体に沿って遷移層の数が減る方向に動いていくと考えられる．

空間高次元の場合には，すべての定常解およびその不安定多様体のつながり具合が 1 次元の場合より複雑であるため詳細ははっきりしていない．重要と思われる特殊解，例えば Cahn–Hilliard 方程式における bubble 解([4])に着目してその運動を調べるか，あるいはより一般的には第 5 章で述べる特異極限の方法により界面ダイナミクスに帰着して考えるのが有力と考えられる．実際(4.9)の特異極限は平均曲率流により記述されるので，± 1 の各領域がどのように変遷していくかはかなりわかる．

複素 Ginzburg–Landau 方程式

上のエネルギー汎関数が複素数値の秩序変数を許容する場合，すなわち

$$E(\Phi) = \int_\Omega \left(|\nabla \Phi|^2 + \frac{\lambda}{2}(1-|\Phi|^2)^2 \right) dx \tag{4.10}$$

に対応する Euler–Lagrange 方程式は

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} \Phi_t &= \Delta\Phi + \lambda(1-|\Phi|^2)\Phi \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \end{aligned}$$

となり，(磁場の効果がないときの)**時間依存する複素 Ginzburg–Landau 方程式**とよばれ，超伝導状態を記述するモデルとしてよく知られている．

これは $C(\overline{\Omega};\mathbb{C})$ 上の滑らかな流れを生成する．$|\Phi|^2=1$ は完全な超伝導状態を，$|\Phi|^2=0$ は正常状態を表す．汎関数を最小にする最小解(minimizer)は $\Phi=e^{ic}$ (c は任意の実定数)となり，実変数の場合の自然な複素拡張になっており，完全な超伝導状態に対応している．したがって変分的に興味があるのは非定数な**極小解**(local minimizer)となる．

最近，この方向において神保–森田([140], [141], [142])らによりその解構造が明らかにされつつある．物理的には次のような非定数解により興味がある．

(i)　Ω 全体で $|\Phi(x)|>0$ なる非定数解(永久電流に対応)，

(ii)　Ω 内で零点をもつ非定数解(渦糸解に対応)．

しかし，次の結果より Ω のとり方には工夫が必要となる．

定理 4.17　Ω が凸ならば，$\lambda\,(>0)$ の値に関係なく(4.11)の非定数定常解はすべて不安定である．　□

安定なものは絶対値が1の定数解に限られる．ここで安定であるとは汎関数(4.10)の $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ における極小値を与えるものを言い，それ以外はすべて不安定という．この安定性は発展方程式の解として Lyapunov の意味で安定であることと同値であることが知られている([265])．また，これは実変数の場合の定理 4.15 の自然な拡張にもなっている．さらに，このときいくつかの零点をもつ初期関数から出発すれば，それらの零点(渦)は境界に吸収されるか，または衝突して消えてしまう．全空間 $\mathbb{R}^2$ におけるこのような運動，あるいは渦糸解の安定性についても多くの研究がなされている(例えば[213], [277])．

この定理は安定な解で上に述べた永久電流や渦糸(零点を有する解)に対応

するものが実現されるためには領域の位相は非自明なものでなければならないことを示唆しており，実際可縮でない領域に対しては，次のような結果が知られている([143]).

定理 4.18 自明でないホモトピーをもつ(可縮でない)領域(例えば円環領域)では，λ がある程度大きければ安定な永久電流が流れる(この解は零点をもたない). □

逆に可縮な領域 Ω (例えば単連結領域)での非定数解は必ず零点をもつ．これを安定化するためには領域は非凸なものでなくてはならないが，その特徴づけは完全にはわかっていない．一方，別のアプローチとして変数係数の拡散係数を考えることにより，任意の領域で指定された場所で零点をもつ解の安定化をはかることもできる([52])．また，もとの問題の意味から考えるとやや人工的ではあるが，境界条件を Dirichlet 条件に変えると最小解は零点をもち，λ が大きいとき，この渦糸解の振舞いは Ω から S^1 への調和写像の特異点構造を明らかにするのに役立つことが知られている([20]).

(c) 保存型勾配系

Cahn–Hilliard 方程式

さてこれまでは Ginzburg–Landau 型のエネルギーから導かれる変数について制限を加えなかった．しかし自然な拘束条件が付く場合も多く，その中で最も重要なものは**保存系**のクラスである.

例えば 2 重井戸型ポテンシャルの ± 1 が 2 種類の異なる物質(合金)を表しているならば，初期条件 $u_0(x)$ の配合比から決まる次の量は保存されるべきである.

$$\overline{u(t,\cdot)} \equiv \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx, \quad 0 < \overline{u_0} < 1$$

この保存条件の下で(4.1)の Euler–Lagrange 方程式を $L^2(\Omega)$ で導くと

$$u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(u) - \overline{f(u)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (\partial\Omega \text{ 上})$$

となり非局所項(積分項)をもつ方程式を得る．しかし，これはモデルの意味を考えると満足できるものではない．つまり合金が系全体を見て(積分して)非局所的に振る舞うとは考えにくいからである．そこで，局所的な相互作用のみでしかも保存条件をみたすようなモデルを導く必要がある．Fife は，この問題に対し，(4.1)を Hilbert 空間 H_0^{-1}(平均が 0 である H^{-1} の閉部分空間)上で定義し，grad(勾配)の意味を H^{-1} の内積で考えると自然に保存系となることを指摘した([98])．この場合の Euler–Lagrange 方程式は

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} &u_t = -\Delta(\epsilon^2\Delta u + f(u)) && x\in\Omega \\ &n\cdot\nabla u = n\cdot\nabla\Delta u = 0 && x\in\partial\Omega \end{aligned}$$

となり4階の方程式となる．これは **Cahn–Hilliard 方程式**とよばれ，保存型の反応拡散方程式の基礎方程式の一つである([37])．$f(u)$ の線形項 u に $-\Delta$ が作用するので逆拡散的効果をもつが，4階の項 $-\epsilon^2\Delta^2 u$ のおかげで解の存在や滑らかさは保証される([124], [226], [82])．実際

$$H_E^2(\Omega) = \{u\in H^2(\Omega) \mid n\cdot\nabla u = 0,\ \overline{u} = 0\}$$

と定義し(簡単のため $\overline{u}=0$ とした)．$A=\epsilon^2\Delta^2 u$ に対し

$$D(A) = \{u\in H_E^2(\Omega) \mid \Delta u\in H_E^2(\Omega)\}$$

とすれば，$L^2(\Omega)$ を基礎空間として A はセクトリアル作用素となり，$X=D(A)$ のとき $X^{1/2}=D(A^{1/2})=H_E^2(\Omega)$ である．さらに(4.12)は(4.1)を Lyapunov 関数としてもつので，§4.2(a)の議論より次が成り立つ．

定理 4.19　$u_0\in H_E^2(\Omega)$ とする．このとき，(4.12)の解 $u(t,x)$ は時間大域的に存在し，その ω-極限集合は $H_E^2(\Omega)$ における連結なコンパクト不変集合である．さらに，(4.12)の定常解がすべて孤立しているならば，$u(t,x)$ は $t\to\infty$ のとき，定常解に収束する．　□

Γ-極限による最小解の特徴づけ

具体的には(4.12)の解 $u(t,x)$ はどこへ収束していくのであろうか．勾配系であることを思い出せば，エネルギー汎関数の最小値へ落ち着くと考えるのが自然である．非保存系の場合は，それは自明な定数状態 ± 1 となるが，

保存系の場合は制約条件があるので必然的に非定数解となる．以下では幾何学的な特徴づけが可能となる ϵ が小さい場合の**最小解**(minimizer)を調べる．

考えるのは非凸なポテンシャルをもつ特異摂動型の次の変分問題である．

$$
(4.13)\qquad \begin{cases} \displaystyle\inf_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \int_\Omega u dx = c}} \hat{F}_\epsilon(u) \\ \displaystyle\hat{F}_\epsilon(u) = \int_\Omega W(u) + \epsilon^2|\nabla u|^2 dx \end{cases}
$$

ここで，$W(u)\left(=\dfrac{1}{4}(u^2-1)^2\right)$ は 2 重井戸型ポテンシャルであり，また Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域であり，Lipschitz 連続な境界をもつとする．制約条件の定数 c は $-|\Omega|<c<|\Omega|$ をみたすとする．

最小解の存在は変分法の直接法([116])により確かめられる．それを u_ϵ とすれば，その極限の特徴づけが問題となる．つまり制約条件のため $W(u)$ の最小値 ± 1 の両方を u_ϵ はとることになり，したがって，空間勾配の項 $|\nabla u|$ の寄与を考慮しなければならない．なるべくこの寄与を少なくするために 1 と -1 の領域の境界(これを界面という)をどのようにとればよいか，その幾何学的特徴づけを行うのが目的となる．

形式極限 $\epsilon\to 0$ は特異摂動項 $\epsilon^2|\nabla u|^2$ がなくなり，$\inf\displaystyle\int_\Omega W(u)dx$ となる．このときは制約条件をみたす限り $u=\pm 1$ の分布は自由にとれるので最小解は無限個出現し，そのいずれが u_ϵ の極限となりうるかは定かではない．

$\epsilon\to 0$ での界面の位置に関する情報を含んだ何らかの特異極限は存在するであろうか．これに対する一つの解答が de Georgi による ***Γ*-極限**のアイデアである([65])．それは，未知関数 u_ϵ を ϵ-展開するのではなく変分問題そのものの漸近展開を考えたときの主要項，すなわち

$$(\inf \hat{F}_\epsilon) = \epsilon(\inf F_0) + o(\epsilon)$$

の F_0 がいかなる問題であるかを特徴づけるのである．

このことは多くのことをもたらす．第一に多くの場合 F_0 **がもとの問題** $\hat{F}_\epsilon$ **より簡単**になること．さらに重要なことは，それが**幾何学的に明瞭な意味付け**を与えることである．F_0 を正確に述べるために言葉の準備をしておく．変分をとる際の基礎関数となる有界変動関数空間 $BV(\Omega)$ およびそのノルムを

次で与える.

$$\|u\|_{BV(\Omega)}=\int_\Omega |u|dx+\int_\Omega |\nabla u|,\quad u\in L^1(\Omega)$$

ここで

$$\int_\Omega |\nabla u|:=\sup_{\substack{g\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R})\\ |g|\leqq 1}}\int u(x)(\nabla\cdot g(x))dx$$

と定義する. あきらかに $W^{1,1}(\Omega)$ ならば $BV(\Omega)$ に属するが, 逆は成り立たない. 集合 A の特性関数 χ_A がその反例である. 実際, $u=\chi_A$ に対しては

$$\int_\Omega |\nabla u|=\sup_{\substack{g\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R})\\ |g|\leqq 1}}\int_A(\nabla\cdot g(x))dx$$

となるが, ∂A が滑らかならば発散定理より

$$\int_\Omega |\nabla u|=H^{n-1}(\partial A\cap\Omega)$$

となる. 右辺の H^{n-1} は $(n-1)$ 次元 Hausdorff 測度(面積測度)である. これより一般に Ω の任意の部分集合に対し, その perimeter を次で定義するのは自然である.

$$\text{(4.14)}\qquad \mathrm{Per}_\Omega A=\Omega \text{ における } A \text{ の perimeter}=\int_\Omega |\nabla\chi_A|$$

A の境界が滑らかならば, $\mathrm{Per}_\Omega A$ は Ω の内部に含まれる A の境界の面積となる. 後で用いる次の2つの命題は上の定義からの直接の帰結である(証明は例えば[113]を見よ).

命題 4.20 (**下半連続性**)　$u_\epsilon\to u$ ($L^1(\Omega)$ において)のとき

$$\liminf_\epsilon\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|\geqq\int_\Omega |\nabla u|$$

□

命題 4.21 (**BV の L^1 でのコンパクト性**)　BV の有界集合は L^1 でのコンパクト集合となる. □

主結果は次のとおりである.

定理 4.22 ([206], [267]) u_ϵ を(4.13)の解とする．ある列 $\epsilon_j \to 0$ に対し

$$u_{\epsilon_j} \to u_0 \qquad (L^1(\Omega) \text{ において})$$

が成り立つとする．このとき，u_0 は次の変分問題の解となる．

$$\inf_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ W(u(x))=0,\,\text{a.e.} \\ \int_\Omega u dx = c}} \mathrm{Per}_\Omega\{u=-1\} \tag{4.15}$$

□

注意 4.23 (4.15)は保存則を守りつつ，Ω 内部の $u=-1$ の領域の境界の面積をいかに小さくすればよいかという幾何的問題に帰着したことを示している．

[証明] $H^1(\Omega)$ の関数を用いて，そのエネルギーが $O(\epsilon)$ となるものを構成することはたやすい．実際それは $u=\pm1$ をとる階段関数をとり，その不連続面の幅 ϵ の遷移層で補正すればよい．したがってもとの問題を ϵ で割った次の問題を考えることが意味のある極限を与えると期待される．

$$F_\epsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\epsilon} W(u) + \epsilon|\nabla u|^2 dx & u \in H^1(\Omega),\ \displaystyle\int_\Omega u dx = c \\ +\infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

同時に極限問題の候補として次をとろう．$F_0 \colon L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

(4.16)

$$F_0(u) = \begin{cases} \left(2\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{W(s)}\, ds\right) \mathrm{Per}_\Omega\{u=-1\} \\ \qquad\qquad u \in BV(\Omega),\ W(u(x))=0,\ \text{a.e.}, \displaystyle\int_\Omega u dx = c. \\ +\infty \qquad \text{それ以外} \end{cases}$$

ペナルティ ∞ をつけることで，上の 2 つの汎関数は同じ定義域 L^1 で定義することができ，次の **Γ-収束**を導入することができる．

定義 4.24 (**Γ-収束**) 汎関数列 F_ϵ が極限汎関数 F_0 に L^1-位相で**Γ-収束**するとは，次の 2 条件がみたされるときをいう．

(i) $v_\epsilon \to v$ ($L^1(\Omega)$ において) $\Longrightarrow$ $\liminf_\epsilon F_\epsilon(v_\epsilon) \geqq F_0(v)$

(ii) 各 $v \in L^1(\Omega)$ に対し，$L^1(\Omega)$ でのある部分列 $\{v_{\epsilon_j}\}$ が存在し，

$$v_{\epsilon_j} \to v \ (L^1(\Omega)\text{ において}) \quad \text{および} \quad \lim_{j\to+\infty} F_{\epsilon_j}(v_{\epsilon_j}) = F_0(v)$$

が成り立つ. □

上の条件がみたされるとき，定理 4.22 は直ちに証明される．実際 $u_{\epsilon_j} \to u_0$ ($L^1(\Omega)$ において)ならば，条件(i)より

$$\liminf F_{\epsilon_j}(u_{\epsilon_j}) \geqq F_0(u_0)$$

が成り立つ．いま任意の $w_0 \in L^1(\Omega)$ およびそれに $L^1(\Omega)$ で収束する列 $\{w_{\epsilon_j}\}$ をとれば u_{ϵ_j} は F_{ϵ_j} の解であるから，$F_{\epsilon_j}(u_\epsilon) \leqq F_{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})$ である．これらより条件(ii)を用いれば次を得る.

$$F_0(u_0) \leqq \liminf_{\epsilon} F_{\epsilon_j}(u_{\epsilon_j}) \leqq \lim_{j\to\infty} F_{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) = F_0(w_0)$$

かくして u_0 は(4.15)の解となる.

以上より，示すべきは Γ-収束の 2 つの条件である．まず次のような関数 $v \in L^1(\Omega)$ のみを考えればよい．なぜならそれ以外の場合にはペナルティより自明に成り立つからである.

$$W(v(x)) = 0 \quad \text{a.e.}, \quad \int_\Omega v dx = c$$

また，$-1 < v_\epsilon < 1$ で考えてよいこともわかるので，以下でこのことは仮定する.

条件(i)を示そう．$F_\epsilon(v_\epsilon)$ に対して Cauchy–Schwarz の不等式を適用して次を得る.

$$F_\epsilon(v_\epsilon) \geqq 2\int_\Omega \sqrt{W(v_\epsilon(x))} \cdot |\nabla v_\epsilon(x)| dx$$

これは次のように書き換えられる.

$$F_\epsilon(v_\epsilon) \geqq \int_\Omega |\nabla \phi(v_\epsilon(x))| dx$$

ここで関数 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は次で定義される.

$$\phi(t) = 2\int_{-1}^{t} \sqrt{W(s)}\, ds$$

v_ϵ は v に L^1-収束することより

$$\phi(v_\epsilon) \to \phi(v) \qquad (L^1(\Omega) \text{ において})$$

がわかる．さて命題 4.20 より

$$\liminf F_\epsilon(v_\epsilon) \geqq \liminf \int_\Omega |\nabla \phi(v_\epsilon)| dx \geqq \int_\Omega |\nabla \phi(v)|$$

であり，また

$$\phi(v(x)) = \begin{cases} 0 & v = -1 \\ 2\int_{-1}^{1} \sqrt{W(s)}\, ds & v = 1 \end{cases}$$

となるので，$W(v(x))=0$ a.e. x に注意すれば

$$\int_\Omega |\nabla \phi(v)| = \left(2\int_{-1}^{1} \sqrt{W(s)}\, ds\right) \mathrm{Per}_\Omega\{v=-1\} = F_0(v)$$

となり，条件(i)が示された．

Γ-収束の条件(ii)を示そう．すなわち，各 $L^1(\Omega)$ の元 v に対してエネルギー $F_{\epsilon_j}(\rho_{\epsilon_j})$ が $F_0(v_0)$ に近づく $(j\to\infty)$ ような L^1-収束列 $\rho_{\epsilon_j} \to v$ がとれることをいう．F_0 の定義(4.16)から

$$v \in BV(\Omega), \quad W(v(x)) = 0 \quad \text{a.e.}, \quad \int_\Omega v dx = c$$

をみたす $v \in L^1(\Omega)$ に限定してよい．それ以外のものは $F_0(v)=\infty$ となり，自明に成り立つからである．v はほとんど至るところで 1 か -1 をとるので

$$v(x) = \begin{cases} -1 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

とかこう．ここで A と B は Ω で有限の perimeter をもつ集合であり

$$-|A|+|B| = c$$

をみたす．いま $\Gamma := \partial A \cap \partial B$ とし，$\Gamma \in C^2$ と仮定しよう(一般的な場合も実はこれより直ちに導かれる)．

以下では，どのように近似列を作るかその方針のみ述べ，詳細は[267]に譲る．さて近似列を作る際に問題となるのは -1 と 1 のギャップをどのように

滑らかにつなぐかである．Γ に沿ってうまくつなぐために，内部遷移層関数 $z(s)$ と Γ からの符号付き距離関数 $d(x)$ を準備しよう．まず $z(s)$ は次の微分方程式の解で定義する．

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{W(z)} \tag{4.17}$$
$$z(0) = 0$$

この解は実は $\mathbb{R}$ 全体まで拡張され，1，-1 に指数的に漸近する．

$$-1 < z(s) < 1 \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$
$$|1-z(s)| \leqq C_3 e^{-C_4 s} \quad s \to \infty$$
$$|-1-z(s)| \leqq C_3 e^{C_4 s} \quad s \to -\infty$$

ここで C_3, C_4 は W から決まる定数である．

次に Γ からの符号付き距離関数 d: $\Omega \to \mathbb{R}$ は次で定義される．

$$d(x) = \begin{cases} \mathrm{dist}(x, \Gamma) & x \in B \\ -\mathrm{dist}(x, \Gamma) & x \in A \end{cases}$$

さて1と -1 をつなぐ内部遷移層 $g_\epsilon(s)$ を次のように(4.17)の z を用いて作る．

$$g_\epsilon(s) = \begin{cases} 1 & s > 2\sqrt{\epsilon} \\ \left(\dfrac{1 - z\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}}{\sqrt{\epsilon}}\right)(s - 2\sqrt{\epsilon}) + 1 & \sqrt{\epsilon} \leqq s \leqq 2\sqrt{\epsilon} \\ z\left(\dfrac{s}{\epsilon}\right) & |s| \leqq \sqrt{\epsilon} \\ \left(\dfrac{z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) + 1}{\sqrt{\epsilon}}\right)(s + 2\sqrt{\epsilon}) - 1 & -2\sqrt{\epsilon} \leqq s \leqq -\sqrt{\epsilon} \\ -1 & s < -2\sqrt{\epsilon} \end{cases}$$

これを Γ に沿ってつなぎ合せるために s を $d(x)$ でおきかえて

$$\tilde{\rho}_\epsilon(x) = g_\epsilon(d(x))$$

と関数列 $\{\tilde{\rho}_\epsilon\}$ を定義する．ϵ が十分小さいとき，$d(x)$ は $\{|d(x)| < 2\sqrt{\epsilon}\}$ で

Lipschitz 連続であり，したがって $\tilde{\rho}_\epsilon \in H^1(\Omega)$ となる．g_ϵ の形をみれば ϵ と共に遷移層は急峻となり，$\epsilon \to 0$ では $\tilde{\rho}_\epsilon$ は Γ に沿って 1 と -1 をつなぐ不連続関数となることがわかる．

したがって，$L^1(\Omega)$ の位相で $\epsilon \to 0$ のとき $\tilde{\rho}_\epsilon \to v$ が成り立つことは容易に想像できる．ただし $\int_\Omega \tilde{\rho}_\epsilon dx = c$ をみたさないが $O(\epsilon)$ の定数の補正で調節可能であり，補正後の関数列 $\{\rho_\epsilon\}$ が最終的に求める近似列となる．■

注意 4.25　Ω が図 4.4 のような微少なくぼみをもつ 2 次元領域で平均 c が 0 のとき，界面の位置は定理 4.22 よりそのくぼみにくる．

注意 4.26　1 次元においては[40]により，最小解は単調関数であり，その極限は唯一つの不連続点をもつ階段関数に収束する．

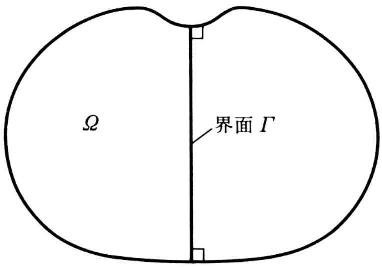


図 4.4　Γ-極限による界面の位置．
くぼみがあるとそこが最短となる．

(d)　非局所項を伴う勾配系

非局所性の由来

問題の由来から自然に汎関数の中に非局所項が含まれる場合がある．代表的なものとして

（1）　共重合ポリマーのように物理的に長距離相互作用をする，

（2）　時定数が極端に異なる場合，例えば弾性効果による緩和時間と反応拡散の緩和時間．

(1)は，明らかに空間的に長距離相互作用する場合であり，共重合ポリマーのように，ある空間スケール(例えば界面の厚さ)に比べて非常に長い高分

子鎖は非局所性をもたらす．(2)は，考えている時間スケール(例えば反応時間)に比べて，別のプロセスが非常に速く進行する場合である．例えば弾性効果は瞬時に伝わり，定常状態に落ち着くと考えて十分良い近似である場合が多い．化学反応系においては反応速度の違いを利用して，いわゆる**擬似定常状態近似**(pseudo-steady state approximation)により大幅に未知関数の次元を減らすことができる．実際，解析可能な少数の変数からなるモデルのほとんどはそのような過程を経て得られるものである．

微細構造をもつ最小解

ここでは共重合ポリマー系の場合を考えよう．その汎関数 $\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}$ は次で与えられる．

$$
(4.18)\qquad \begin{aligned} \mathcal{F}^{\epsilon,\sigma} &= \int_\Omega \left\{ \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + W(u) + \frac{\sigma}{2}\left((-\Delta_N)^{-1/2}(u-m)\right)^2 \right\} dx \\ &u \in H^1(\Omega), \quad m = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx \end{aligned}
$$

ここで，$W(u)$ は ± 1 で最小値をとる2重井戸型ポテンシャルである．$m\,(-1<m<1)$ は2種のポリマーの成分比を表すパラメータであり，保存されるべき量である．第3項が非局所的な効果であり，Neumann 境界条件でのラプラシアンの逆作用素 $(-\Delta_N)^{-1}$ の1/2-分数ベキで表されている．したがって $u-m$ の空間平均は常に0となっている．$\sigma\,(>0)$ はポリマー鎖の長さに関わる定数である．

この定式化は[222]によるが，その原型は[231]，[10]らに負う．Cahn–Hilliard 方程式の場合と同じように，$H^{-1}(\Omega)$ での勾配をとれば $f=-W'$ として

$$
(4.19)\qquad \begin{cases} u_t = -\Delta\{\epsilon^2\Delta u + f(u) - \sigma(-\Delta_N)^{-1}(u-m)\} \\ \quad\; = -\Delta\{\epsilon^2\Delta u + f(u)\} - \sigma(u-m) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \overline{u_0(x)} = m \end{cases}
$$

を得る．ここで $\overline{}$ は Ω での平均を表す．Cahn–Hilliard 方程式(4.12)と比

べて変化したところは $u=m$ を安定化させるような線形の反応項が右辺に加わっただけであるが，それは汎関数の形状やダイナミクスを大きく変える．ここでは空間1次元の変分問題

$$\min_{u\in A_m}\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}(u) \tag{4.20}$$
$$A_m=\left\{u\,\middle|\,u\in H^1(0,1),\ \int_0^1 u\,dx=m\right\}$$

を考えよう．最小解については Müller [209] の手法を用いれば次を示すことができる([228])．

定理 4.27　$m=0$ とし $W(z)=W(-z)$ とする．このとき，ある ϵ_0 が存在し，問題(4.20)は $0<\epsilon<\epsilon_0$ において次の性質をもつ最小解 $u^{\epsilon,\sigma}$ をもつ．

(i)　$u^{\epsilon,\sigma}$ は generic には一意に決まり，図4.5のような周期構造をもつ．周期 $P^{\epsilon,\sigma}$ は次をみたす．

$$P^{\epsilon,\sigma}=2\left(3\sqrt{2}A\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}+O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$$

(ii)

$$\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}(u^{\epsilon,\sigma})=\frac{\sigma}{8}\left(3\sqrt{2}A\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^{\frac{2}{3}}+O(\epsilon^{\frac{4}{3}})$$

ここで $A=4\int_{-1}^{1}\sqrt{W(t)}\,dt$ である．□

注意 4.28　最小解の周期 $=O(\epsilon^{1/3})$ は2種のポリマーの遷移層の幅 $=O(\epsilon)$ と

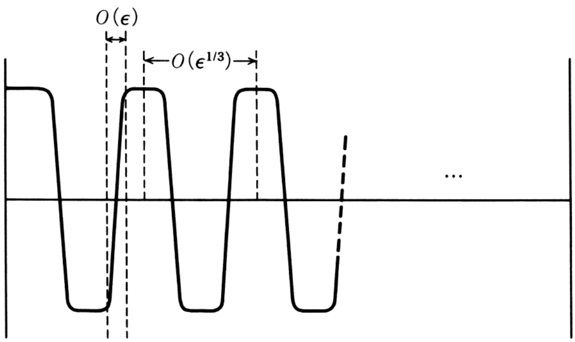


図 4.5　最小解の微細構造

周期は $O(\epsilon^{1/3})$ であり ϵ と共に0へ行く．しかし界面の幅 $O(\epsilon)$ と比べるとそれは非常に長い．

マクロスケール$=O(1)$ の中間スケール(メゾスケール)となっている．$\epsilon\to 0$ のとき，周期幅は 0 へ収束するので，$u^{\epsilon,\sigma}$ は**微細構造**をもつことになる(図 4.5)．

なぜ最小解は激しく振動する微細構造をもつのであろうか．非局所項がない Cahn–Hilliard 方程式の場合，界面は(空間 1 次元の場合) 1 点となりマクロ相分離がおこった．しかし，それを $\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}$ の第 3 項へ代入すると $O(1)$ となり，最小解からはほど遠い．一方，$u=m$ のまわりで激しく振動する形状は第 3 項を小さくする．なぜなら $(-\Delta_N)^{-1/2}$ はコンパクト作用素であり，$u-m$ が 0 へ弱収束するならば第 3 項の寄与は 0 へ近づくからである．しかしあまりに激しい振動は逆に第 1,2 項を大きくしてしまう．したがって，どこかに妥協点のスケールがあるはずであり，それが $O(\epsilon^{1/3})$ である．$v(x)=\int_0^x u(x)dx$ とおき，$\overline{u}=0$ ならば

$$\int_0^1 |(-\Delta_N)^{-1/2}u|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x u dx\right|^2 dx$$

に注意すると，(4.20)は $m=0$ のとき次の変分問題と同値になる．

$$(4.21)\qquad \min_{\substack{v\in H^2(0,1)\\ v(0)=v(1)=0}} \int_0^1 \left\{ \frac{\epsilon^2}{2}|v_{xx}|^2 + W(v_x)^2 + \frac{\sigma}{2}|v|^2 \right\} dx$$

この問題は，実は金属結晶の相転移の一つのモデル汎関数としても現れる([209])．第 1 項の緩和項がなければ，これは

$$(4.22)\qquad \min_{\substack{v\in H^1(0,1)\\ v(0)=v(1)=0}} \int_0^1 \{(v_x^2-1)^2+v^2\} dx$$

となるが，この最小化列は(4.22)の最小解を与えない．実際，勾配が ± 1 でその絶対値が小さくなるような細いのこぎり歯状の関数列はそのような列となるが，その極限 $v\equiv 0$ は(4.22)の最小解ではない．

これは(4.22)が弱下半連続でないことを示している．2 階微分の緩和項が加わることにより，どんどん細くなるプロセスに歯止めが加わり特徴的な $O(\epsilon^{1/3})$ の空間スケールが出現する．このようなスケーリングの導出は[10]でなされているように次元解析的な考察によっても可能である．しかし，その

ためにはいくつかの物理的洞察が不可欠であり，形式計算で出てくるわけではない.

多谷構造

非局所項は微細構造を作り出すと同時に実は非常に多くの**極小解**(local minimizer)を生み出す.

定理 4.29 ([228]) 共重合ポリマー系の汎関数エネルギー(4.18)の極小解の個数は $\epsilon\to 0$ のとき，無限大に発散する. □

これは直接変分問題を解くのではなく，勾配系(4.19)の局所漸近安定な解の個数が $\epsilon\to 0$ と共に $+\infty$ に発散することをいうことによって得られる. 実際

$$v=-\epsilon^2\Delta u-f(u)$$

とおけば(4.19)は

$$\begin{cases} 0=\epsilon^2\Delta u+f(u)-v \\ 0=\Delta v-\sigma(u-m)-u_t \end{cases}$$

となり，これに対して第5章の議論を用いれば正規 n-遷移層の存在と安定性が示せるのである. しかし，それらはすべて $\epsilon\to 0$ のとき有界変動にとどまり微細構造はとらない.

方程式(4.19)を数値的に解くと，図4.6(a)のように非常に多数の局所安定解(黒丸はすべて極小解)が見つかる. したがって，汎関数(4.18)の様子を模式的にかくと，図4.6(b)のように非常に多数の凹凸をもつ複雑な形となる. これを(4.18)は**多谷構造**(rugged landscape)をもつという.

注意 4.30 (**単行本化にあたっての追記**) 上に述べた微細構造の $\epsilon\to 0$ における極限的振る舞いを特徴付けるには Young 測度を用いるのが1つの自然なアプローチであることがわかっている([O1]). 空間が2次元以上の場合には，リスケールの後，どのような幾何的形状が最小解で実現されるのかが数学的にも物理的にも重要となる. 空間2次元においては，ヘキサゴナル構造が最小値を達成することが厳密に証明されている([CO]). しかしながら3次元においては，ラメラ相やヘキサゴナル相以外にも多様な周期構造が存在し複雑となる. たとえば付録Aで述べるダブルジャイロイドとよばれる構造がある. これはあるパラメータ領域では周期的極小曲面の中でエネルギー最小値をとることが数値的に検証され

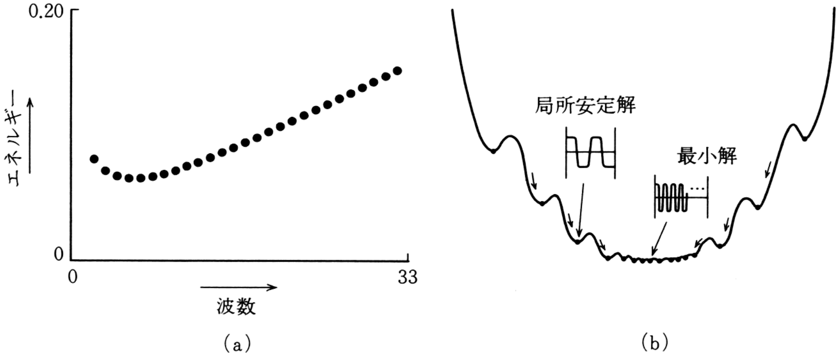


図 4.6　エネルギー汎関数の多谷構造

(a) モデル方程式 $u_t=-[\epsilon^2 u_{xx}+u(1-u^2)]_{xx}-\sigma(u-\bar{u})$ の極小解の分布．ここで $\bar{u}$ は u の平均値であり，境界条件は $u_x=u_{xxx}=0$ である．またパラメータは $\epsilon=5\times10^{-3}$, $\sigma=50.0$, ドメインサイズ$=1.0$ である．(b)微細構造をもつ最小解はあるが，それ以外に非常に多数の極小解が存在し，最終状態は初期値に依存する．

たが([TN1])，その厳密な証明は今後の課題である．また変分問題という枠を離れて，3 次元 Turing パターンというカテゴリーにおいても多彩な定常解が発見されている([SYUO])．ダブルジャイロイド構造に関連して，3 次元空間における形態同定問題に有用な計算ホモロジーという位相的手法の解説を付録 A として付したので詳細はそちらを参照されたい．

§4.3　開放系とそのダイナミクス

外部から物質やエネルギーが流入・流出する開放系においては，一般に解軌道に沿って単調に減少していく汎関数はなく，したがって勾配系であることは望めない．さまざまな秩序やリズムを形成するその多様性は平衡状態へと漸近していく勾配系とは対比的である．

Turing が最初に問題とした拡散不安定性にその一端を発する開放系の地平はいまも広がりつつあり，その全容を短く要約することは困難である．ここでは，まず最も典型的なモデル方程式を現象論的に導入し，それがもつ基

本パターンを主としてスケーリングの立場から論ずる．特異極限的手法による界面ダイナミクスについては第5章で述べる．この節以降の議論は[208], [177], [201], [229], [279]などを併せて読まれると理解が深まるであろう．

(a) 反応拡散方程式系の基本モデル

反応拡散方程式とよばれる一群の方程式は多分野，多岐にわたり，初めて見るものにとっては統一性もなく混沌とした印象を与えるかも知れない．それはモデル化のレベルがさまざまであり，問題ごとに非線形性が少しずつ異なり，どこをベースキャンプにして全体を理解すればよいかはっきりしないからであろう．

この節では最も典型的かつ単純と思われる基本モデル方程式をとりあげ，それを座標軸にして他の種々の方程式との関連を論ずる．その導出は振幅方程式のそれと比べて，より現象論的であるが，定性的には多くの方程式の雛形を与えている．基本モデル方程式は2つの未知関数 (u, v) をもち，それぞれ空間的に拡散するとし，さらにその反応キネティクス(kinetics)

$$u_t = f(u, v), \quad v_t = g(u, v) \tag{4.23}$$

は次の要請をみたすものとして得られる．

仮定1　1つの変数 u については双安定系であり，他の変数 v はその双安定状態の強弱の程度を制御する役割をもち，v の増大は u を減少させる．

双安定性はパターン形成問題においてはしばしば，酸化・還元，固相・液相など，少なくとも2つの異なる安定状態をとることに起因している．典型例はすでに§4.2(b)で出会った $f_0(u) = u - u^3$ がある(むろん上の仮定をみたすものは，これに限らない)．これに双安定状態の強弱をコントロールする変数 v を最も簡単な線形の形で入れると，$f(u, v) = f_0(u) - v$ を得る．

図4.7からわかるように，v をパラメータとみなした1次元の常微分方程式 $u_t = f(u, v)$ を考えると，明らかに2つの安定平衡点 $h_-(v)$ および $h_+(v)$ の吸引領域が v によって制御されていることがわかる．この双安定性を示す変数 u は，**活性化因子**(activator)，**伝播変数**(propagator)などとよばれることがある．前者は次節で明らかになるように，その自己増殖的フィードバッ

クを現しており，後者は後にみるように，ある秩序が空間的に伝播していくキャリヤーを現すものという意味がある．変数 v の非線形性 $g(u,v)$ については次をみたすものをとる．

仮定2　変数 v は u の増大により増え，v の増大により減少する．

最も単純な例は $g(u,v)=u-\gamma v+k$ (γ, k: 正定数)で与えられる．v は**抑制化因子**(inhibitor)あるいは**制御変数**(controler)とよばれる．抑制的であるのは f を見れば，v の増大は u を阻害することよりわかる．制御変数とよばれるのは u の進行波解の速度の大きさや向きが v によって決められるからである．以上の非線形性を採用すると次のモデル方程式を得る．

$$
\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + f(u,v) \\ v_t = D_v \Delta v + g(u,v) \end{cases} \quad x \in \Omega \tag{4.24}
$$

Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな有界領域とする．境界条件としては，以下では，とくに断らない限り次の Neumann 条件を採用する．

$$
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{4.25}
$$

上の系は**伝播・制御型反応拡散系**(あるいは**活性・抑制型反応拡散系**)とよばれる．非線形性 (f,g) は上のような多項式形に限定する必要はないが(より一般のクラスについては第5章および[218]を参照)，以下の議論においては上の具体形を念頭において話を進める．上のようにして決まった非線形性は解の L^∞ 有界性は自然にみたしている．

この伝播・制御型方程式はさらにそのキネティクス(kinetics)，すなわち拡散項がない場合の2次元力学系の振舞いにより次の4つのクラスに分ける．

(1)　Turing 系(Turing system)

(2)　振動系(oscillatory system)

(3)　興奮系(excitable system)

(4)　双安定系(bistable system)

図4.7からわかるように，アトラクターがただ1つの場合が最初の3つであり，2つある場合は最後の双安定系となる．ここでの双安定性は2次元力学系としての意味であり，v を固定したときの単独方程式 $u_t=f(u,v)$ のそれ

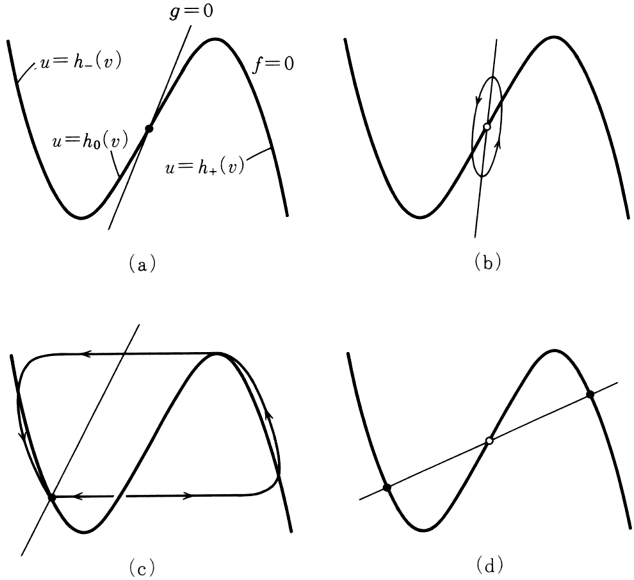


図 4.7　基本モデルのダイナミクス

(a) Turing 系，(b) 振動系，(c) 興奮系，(d) 双安定系

とは別の意味である．

アトラクターが1つの場合はそれが**極限周期軌道**(limit cycle)のとき**振動系**とよばれる．安定平衡点の場合はそれが $f(u,v)=0$ 曲線の真ん中の枝にあるか，図4.7(c)のように左の枝に乗っているかにより，**Turing 系**および**興奮系**とよばれる．後に見るように Turing 系は空間的に非一様な摂動に対してはその平衡点は不安定化し得るが，興奮系の平衡点はそのような摂動に対しても局所漸近安定であり，同時に興奮性(excitability)という特徴的な軌道の振舞いをもつ．以下では，(1)の Turing 系と(3)の興奮系に焦点を絞り議論する．

(b)　Turing 系と定在波

拡散不安定性

すでに§4.2(b)で単独の反応拡散方程式に出会った．単独の場合は勾配系

ゆえ漸近的には定常解へ落ち着く，しかもそれは本質的には定数状態であることもわかっている．すなわち非一様な構造が形成されることはなく，エネルギー汎関数の最小値へ落ち着く．これは，拡散が不均一をなくし，一様化へ導くという直観にも合致する．

しかし，**複数**の拡散物質が組み合されるとき，この直観が必ずしも正しくないことを示したのは，[244]と[272]であった．そのアイデアそのものは基本的に線形の枠で議論できるが，その影響は現在にいたるまで実に大きいものがある．

さて2つの拡散物質 (U,V) があり，その濃度を (u,v) とかき，それらが拡散しつつ非線形相互作用 (f,g) を行うとして反応拡散方程式(4.24)を考えよう．空間的に一様な定数状態 $X_0=(u_0,v_0)$ の存在はすでに仮定した．すなわち $f(X_0)=0$，$g(X_0)=0$ とする．これに空間的摂動が加わったときの線形安定性は次の X_0 での線形化方程式をみればよい．

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = D_u \Delta w + f_u w + f_v z \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial t} = D_v \Delta z + g_u w + g_v z \end{cases} \tag{4.26}
$$

ここで右辺の非線形項のヤコビアンは X_0 での値をとる．

Turing らは，ゆらぎが成長して空間的に非一様な秩序が形成されるために次の要請を X_0 に課した．

(T) 拡散不安定性(diffusion-driven instability，あるいは Turing 不安定性)：ODE(4.23)の安定平衡点ではあるが，PDE(4.26)の解としては不安定化が起きる．

直ちにわかるようにこれは単独方程式ではみたすことができない．遅れや非局所項を導入することなく，ただ拡散と反応が組み合されることで，空間非一様なゆらぎから秩序形成が起こるには2変数以上のシステムを考える必要性がある．高階微分の方程式を考えることでも(T)をみたすことは可能である．しかしそれは実質的にシステムを考えていることに等しい．簡単のため全領域 $\mathbb{R}^N$ でまず考えることにする．次の形で解を求めれば十分である．

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_k \exp(\omega_k t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

これは波数ベクトル $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^N$ の摂動に対して $\exp(\mathrm{Re}(\omega_k)t)$ という時間的増大度をもつものをさがすことになる．

これを(4.26)に代入すると，次の ω_k と $k=|\boldsymbol{k}|$ に関する特性方程式が得られる．

(4.27) $$\omega_k^2 - T\omega_k + \delta = 0$$

ここで

(4.28) $$T = T(k^2) = f_u + g_v - k^2(D_u + D_v),$$

(4.29) $$\delta = \delta(k^2) = f_u g_v - f_v g_u - (D_v f_u + D_u g_v)k^2 + D_u D_v k^4$$

である．拡散および反応は等方的であるので，(4.27)は $h=k^2$ のみに依存する．(T) の最初の要請である ODE の(漸近)安定平衡点であるための十分条件として

(4.30) $$T(0) = f_u + g_v < 0$$

(4.31) $$\delta(0) = f_u g_v - f_v g_u > 0$$

を課する．(T)の後半の要請は，まさに不安定化するところで，(4.27)が $\mathrm{Re}(\omega_k)=0$ をみたすような解をある正の h に対してもつことである．しかし，前半の要請と $T(h)$ の定義および $D_u+D_v>0$ より，不安定化するのは必ず実固有値$=0$，すなわち $\delta=0$ のときにしか起こらない．これは不安定化が Hopf 分岐では起こらず，定常分岐の形で生じることを意味する．要請(4.31)より，$\delta=0$ が正の h で成り立つには

(4.32) $$D_v f_u + D_u g_v > 0$$

が必要条件となる．さらにそれが最初の不安定化であるためには $d\delta/dh=0$，すなわち重解条件

$$(D_v f_u + D_u g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)D_u D_v = 0$$

が必要となる．このときの不安定波数 k_c (重解の値)は

(4.33) $$k_c = \left\{\frac{f_u g_v - f_v g_u}{D_u D_v}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

で与えられる．注目すべきはこれから生じる構造は U と V の拡散長の幾何平均に比例し，境界条件などによらない**系の固有の波長**

(4.34)
$$L = \frac{2\pi}{k_c}$$

をもつことである．これは Bénard 対流のセルの大きさが外部要因で決定される場合と対照的である．これは Navier–Stokes 方程式において流速零の熱伝導状態での線形化方程式が上のような線形部分をもたないことに起因する([259]参照).

さて，(4.30)と(4.32)より f_u と g_v は同符号ではあり得ない．したがって，(4.31)より

(4.35)
$$f_u g_v < 0, \quad f_v g_u < 0$$

となる．これまでは u と v にとくに差異化はもうけなかった．しかし線形化行列の各要素の符号を決めるためには，この対称性は破らざるを得ない．数学的には f_u の符号は任意にとれるが，いま

(4.36)
$$f_u > 0 \text{ かつ } g_v < 0$$

としよう．$f_u > 0$ は u が増えるとその生成速度が増大することを意味している．すなわち，われわれは u が**活性因子**であるとみなしたことになる．反対符号を採用したときは v が活性因子となる．f_v の符号についても(4.35)の縛りがあるだけなので一意的には決まらない．もし $f_v < 0$ を採用するならば v の増加は活性因子の増加を抑制するので v は**抑制因子**に相当し，そのときの系は，(a)ですでに現れた**活性・抑制系**(activator-inhibitor system)とよばれる．(4.30)および(4.32)より，Turing 不安定性がおこるときは

(4.37)
$$D_v > D_u$$

でなければならない．すなわち抑制因子の拡散速度が活性因子のそれより速いときにのみ，この不安定性がおきる．

一方，$f_v > 0$ のときは**基質・消費系**(substrate-depleted system)とよばれる．このときの v は反応基質(substrate)とみなされている．たとえて言うなら，これは u は温度，v は消費される燃料のようなもので，v の存在は u を増大($f_v > 0$)させる向きに働く．第6章で述べる Gray–Scott モデルはこの一

例となっている.

注意 4.31 上の activator-inhibitor あるいは substrate-depleted という分類名は着目する定数解のまわりでの線形部分のみから決まる名前であり，大域的な非線形性にはよらない．したがって大域的な非線形ダイナミクスの振舞いと上の名前が示唆するダイナミクスとが必ず合致するわけではない(例えば Brusselator モデル，Gray–Scott モデルなど).

さて Turing 系の代表的モデル方程式として Lengyel–Epstein モデルがある．これは CDIMA 反応とよばれる実際の化学反応系に立脚した現実的なモデルである([187]).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a - u - \dfrac{4uv}{1+u^2} + \Delta u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \delta\left[b\left(u - \dfrac{uv}{1+u^2}\right) + c\Delta v\right] \end{cases}$$

ここで u はヨウ素イオン濃度，v は塩素イオン濃度を表している.

分岐理論・特異摂動理論

前節では拡散不安定化がどのように起こるかを見た．この不安定化がどのような空間秩序を生み出すかを正確に記述するために，いくつかの非線形解析の手法が開発されている.

局所分岐理論(小振幅解) 非線形性や拡散の強さが変化すると，ある有限帯状の範囲にある波数が一斉に不安定化する．有限領域に制限して，適当な境界条件(例えば Neumann 条件)で考えると，たかだか有限個の離散固有値のみが不安定化する．したがって，これに分岐理論や中心多様体などの力学系のさまざまな手法が適用できる．これらについては空間高次元の場合まで込めてすでに一般論ができており，ここではその詳細は述べない．例えば [178], [148], [212] などを参照されたい.

特異摂動論(大振幅解) 分岐理論で一般的に扱えるのは多くの場合，自明な解の近傍に限定され，分岐点から離れたところでの大域的な挙動は位相的

手法による定性的理論があるが，解やそのまわりでのダイナミズムの詳細を知る上では極めて不十分なものである．大振幅解を捉える理論的手法として，特異摂動法がある．これは空間1次元のときは古典的な接合漸近展開法([94], [97], [204], [138])をはじめ，近年発展が著しい幾何学的特異摂動論([146])などが解の存在および安定性を与える．その一端については第5章の特異極限のところで述べる．

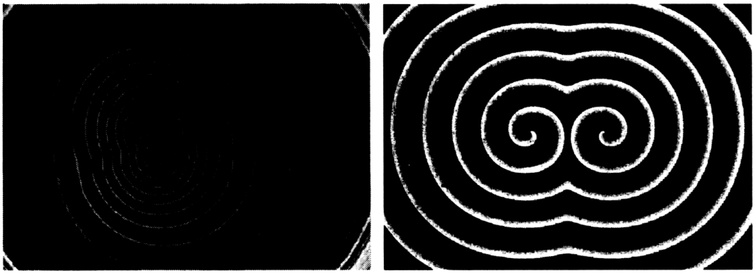
高次元の場合には特異摂動の種となる第0近似解(いわゆる帰着方程式の解)を求めることが困難であり，解の存在や安定性の厳密理論はほとんど沃野のままである([255], [269]も参照)．しかし，リスケーリングの立場から興味あるいくつかの定性的結果が得られており，それらについては次節および第5章で述べることにする．一方で計算機による無限次元空間における非線形ダイナミクスの探求は近年急速に発展し，実際第6章に見るように例えば大域的な枝の追跡法は実用的となりつつある．摂動的方法論をこえるためには計算機探索に基づく新しい理論構築が不可欠となっていくであろう．

(c)　興奮系と渦巻波

1970年初頭に，図4.8のようなラセン状の化学反応パターンが酸化・還元反応において現れたとき，それは大きな驚きをもって迎えられた．このBZ反応(Belousov-Zhabotinsky reaction)とよばれる，自発的に一定の角速度で渦巻く動的パターンはそれまでの化学反応系では予想もされなかったものであった．

結晶成長と同じように，ここでの問題は渦巻の形状，とくに中心(コア)付近の形状や角速度がどのように決まるかということである．そのためには解析が可能で実験とも照合できる単純なモデル方程式が必要となる．BZ反応の詳細は極めて複雑であるが，2次元の反応拡散方程式系，およびそれから導かれる界面ダイナミクスはそのマクロな挙動をよく捉えている．

そこで抽出されたダイナミクスはBZ反応のみならず，神経伝播，細胞性粘菌，Rayleigh–Bénard対流，ネマチック液晶などに現れる渦巻波にも適用できる．さらにその特別な場合は第5章で述べる平均曲率流に帰着する．こ



(a) (b)

図 4.8 (a) BZ 反応の実験, (b) 数値シミュレーション

$u_t = D_u \Delta u + u(1-u)(u-a) - v, \quad v_t = \epsilon(u - \gamma v)$
$D_u = 2\times10^{-6}$, $a = 0.25$, $\gamma = 7.1$(単安定),
$\epsilon = 1\times10^{-3}$, ドメインサイズ$=2.0\times1.5$

のことは渦巻波が個々の実体や機構の詳細によらない普遍的なダイナミクスの一つであることを示唆している.

興奮系におけるダイナミクス

基本的なキネティクスは u を速い変数, v を遅い変数として

$$u_t = f(u,v), \quad v_t = \epsilon g(u,v) \tag{4.38}$$

で与えられる. ϵ は小さな正定数であり u と v の時間スケールの違いを反映している. u, v は BZ 反応のときにはそれぞれ $HBrO_2$, フェリインの濃度であり, 神経モデルのときはそれぞれ膜電位, イオン性コンダクタンス(膜チャンネルの開閉度)に対応する.

興奮系のキネティクスにおいて最も特徴的なことは**閾値**(threshold value)の存在である. 図 4.9 からわかるように, 初期値にかかわらず, すべての軌道は最終的には漸近安定な平衡点 $U_s = (u_s, v_s)$ へ収束する. しかし, 例えば直線 $v = v_s$ 上から出発する場合, $u = a$ 付近を境にしてその近づき方は大きく異なる. $u < a$ であれば直ちに U_s へ収束するが, $0 < \epsilon \ll 1$ なので $u > a$ ならば大きく右へ迂回し, 左へジャンプしてから U_s へ漸近する. この意味で $u = a$ は閾値とよばれるにふさわしい. a の大きさは系がどの程度敏感に反応

して興奮するかのめやすを与える.

拡散効果がこの興奮系に加わったときのモデル方程式は次のようになる.

$$
(4.39)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u,v) \\ v_t = \delta\Delta v + \epsilon g(u,v) \end{cases}
$$

ここで, $\delta = D_v/D_u$ は u と v の拡散比を表す. この拡散により空間方向の伝播波が励起される. すなわち空間の1点で閾値をこえる刺激が与えられると, u は大きく立ち上がり, 次に拡散効果によりその周りが閾値をこえるとそこで u の励起がおこり, これが伝播していく. 一方で最初立ち上がったところは一定時間後原点へ戻ってくる. したがって空間1次元では孤立パルス波, 2次元では環状に広がるパルス波の存在が期待される. さらに刺激が適当な周期で加えられるならば, 1次元では周期進行パルス解, 2次元では標的(target)解が生まれるであろう.

刺激の周期は, あまり短くはできない. 短いと図4.9からわかるように抑制変数 v の値が下がっていないので(v は遅い変数であった), 少々の刺激の強さでは u は興奮できない. 一方, 周期が長くなればそれは単独パルスの振舞いに近づく.

そのような伝播波が存在するためには拡散比 δ は勝手ではあり得ない. まず v の役割は u の立ち上がりやすさを(抑制的に)コントロールしていることに注意する. 図4.9からわかるように v が増大すると閾値が高くなり, u は立ち上がりにくくなる(u の興奮が抑制される). したがって, δ が大きく v が拡がるのが速ければ u の伝播はブロックされてしまうであろう. 実際, そのような拡散比の領域では, 伝播波ではなく Turing 型定常解が存在することになる((4.37)を見よ).

以上より δ はたかだか $O(1)$ である. BZ反応では通常の化学物質の拡散の速さはほぼ同じであることを反映して $\delta \approx 1$ であり, 神経パルスモデルでは $\delta = 0$ なので, これは整合的である.

ここで後の便宜上, (4.39)の第1式において v を固定したとき, u の双安定単独方程式の1次元フロント解の存在とその速度 c について述べておこう. 進行波座標 $\xi = x - ct$ を導入し, また v は $h_\pm(v)$ で定義される範囲を動くと

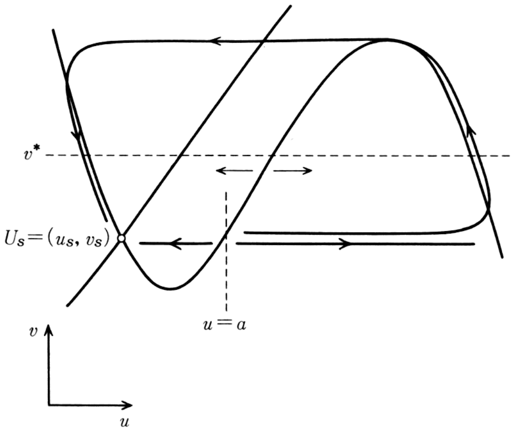


図 4.9 興奮系のダイナミクス

v^* は $J(v)=0$ をみたす点であり，$h_-(v^*)$ と $h_+(v^*)$ を結ぶフロント解の速度は 0 である．v_s が v^* に近づけば閾値は高くなる．この閾値をこえれば軌道はすばやく右の枝へジャンプし，しばらくそれに沿って動き，頂上付近で左の枝へ再びジャンプし，そして平衡点に漸近する．

き次が成り立つ．

命題 4.32 ([71], [99], [100])

$$u_{\xi\xi}+cu_\xi+f(u,v)=0, \quad \xi\in\mathbb{R}$$
$$\lim_{\xi\to\pm\infty}u(\xi)=h_\pm(v)$$

の解 u は平行移動を除いて一意に存在し，その速度 c も v の関数として $c=c(v)$ と一意に決まる．またその符号は

$$c(v)\gtreqless 0 \iff J(v)\equiv\int_{h_-(v)}^{h_+(v)}f(s,v)ds\lesseqgtr 0$$

と決定される．また $J(v^*)=0$ をみたす v^* は一意にきまる． □

モデル方程式(4.39)は遅い変数 $t'=\epsilon t$, $x'=\epsilon x$ を導入して(改めてそれを (t,x) とかくと)

(4.40)
$$\begin{cases} \epsilon u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(u,v) \\ v_t = \epsilon\delta\Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

とかきかえられる．この表現は，特異摂動論を適用する際には便利となる．(4.39)は**速い系**(fast system)，(4.40)は**遅い系**(slow system)とよばれる．

具体的な非線形項の形は，神経モデルでは§4.3(a)での基本モデル方程式と同じ

(4.41)
$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(1-u)(u-a) - v \\ v_t = \epsilon(u - \gamma v) \end{cases}$$

で与えられ($0 < a < 1/2$)，**FitzHugh–Nagumo 方程式**とよばれている．そこでは神経軸索を伝播する(1 次元)孤立パルスおよびパルス列が情報の伝達を担っている．

一方，図4.8のようなBZ反応に対してはいくつかのモデルが提案されているが，**オレゴネータ**(Oregonator)とよばれるものは次で与えられる．

(4.42)
$$\begin{cases} \epsilon u_t = \epsilon^2 \Delta u + \left[u(1-u) - \dfrac{\gamma v(u-k)}{u+k} \right] \\ v_t = \epsilon\delta\Delta v + u - v \end{cases}$$

ここでγ, kは正定数である(より詳しくは[278]を参照)．(4.42)の非線形項の零点集合をかけばわかるように，これは§4.3(a)の2つの仮定をみたしていることに注意しよう．

さて興奮系，とりわけBZ反応で最も重要な2次元パターンは渦巻波であろう．1次元パルス解を単純に2次元に拡張すると帯状パルス解を得るが，現実にはどこかでその帯は切れ，したがって端をもつ．そこから必ず出現するのが渦巻波である．渦巻波の特徴は外部からの刺激は必要ではなく，自発的に生成される点である．そのことが普遍性をもたらす1つの理由となっている．以下では1次元パルス解の性質を簡単に述べた後，渦巻波に焦点を当て調べることにする．

進行パルス解と分散関係

(i)　進行パルス解

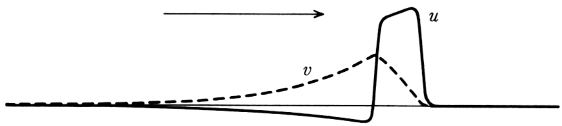


図 4.10　進行パルス波

次の興奮系モデル方程式の単独進行パルス，ただし v-成分は振幅を 6 倍にして表示してある．

$u_t = D_u \Delta u + u(1-u)(u-a) - v, \quad v_t = \epsilon(u - \gamma v)$

$D_u = 2\times 10^{-4},\ a = 0.25,\ \epsilon = 1\times 10^{-3},\ \gamma = 3.0,$

ドメインサイズ $= 6.0$

興奮場における最も基本的なパターンは進行パルス解(あるいは単にパルス解)とよばれるもので，図 4.10 のように，一定の波形を保ってある速度 c で進む孤立波である．それは本質的に 1 つの変数 $\xi = x - ct$ のみに依存する解 $U(\xi) = U(x-ct) \equiv (u(x-ct),\ v(x-ct))$ で

$$0 = DU_{\xi\xi} + cU_{\xi} + F(U) \qquad (4.43)$$
$$\lim_{\xi \to \pm\infty} U = U_s$$

をみたすものである．ここで

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad F(U) = (f, \epsilon g), \quad U_s = (u_s, v_s)$$

である．これは上の常微分方程式の $U = U_s$ へのホモクリニック軌道と対応する速度 c を求めることに他ならない．

FitzHugh–Nagumo 方程式に対して，そのパルス解の存在は独立に[38]，[122]によって最初に与えられ，後に，[184]により幾何学的手法によっても証明された．[147]は exchange lemma というより洗練された形で slow-fast 系での軌道の追跡を可能にし，それにより，[184]の簡単な別証明を与えた．これは幾何学的特異摂動論の雛形となっている([146])．

定理 4.33 (パルス解の存在)　十分小さな ϵ に対し，FitzHugh–Nagumo 方程式(4.41)は速度 $c_p(\epsilon)$ をもつパルス解 U_p をもつ．また $c_p(\epsilon)$ は $\epsilon \to 0$ の

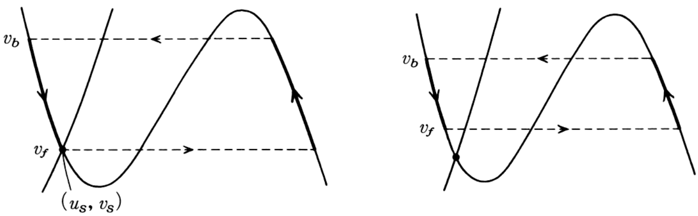


図 4.11 (a) v を固定した単独双安定型方程式のフロント波とバック波の速度がそれぞれ $v=v_f(=v_s)$ と $v=v_b$ とで等しくなるように v_b の値がきまる．(b) パルス解のときと同様に，フロント波とバック波で速度が同じようになるように v_f, v_b の値がきまる．平衡点は通らないので周期解となる．

とき非線形性から決まる特異軌道(singular orbit)の速度 c_p^* へ近づく(図 4.11 (a))． □

図 4.11 の点線の軌道は $v=v_f$ (あるいは v_b)と固定した u の単独方程式のフロント解を表す．命題 4.32 よりそれは一意に存在し，速度も $c(v_f)$ (あるいは $c(v_b1)$)と v の関数として定まる．

パルス解の安定性については Evans([85]〜[88])が線形化問題の固有値の位置をいわゆる Evans 関数の零点と関連付け，それが現在，stability index とよばれている位相的手法による安定性解析の道を開いた([1], [108], [146], [215], [256])．

FitzHugh–Nagumo 方程式のパルスの安定性は[145], [281]により厳密に与えられた．解析的手法による安定性解析は前節で述べた伝播・制御型方程式系に対しても得られており，第 5 章の §5.4 で述べる．これら位相的および解析的手法の間には密接な関連があることもわかっている([135])．

定理 4.34 (パルス解の安定性) パルス解 U_p は $\gamma>0$ のとき，位相のずれを除いて $C_b(\mathbb{R})$ (有界一様連続関数)の意味で局所漸近安定である． □

(ii) 周期進行波解と分散関係

図 4.9 に見られるように渦巻解(spiral pattern)や標的解(target pattern)

の中心から離れたところでは2次元に拡張された1次元周期進行波解が良い近似となることがわかっている.

周期進行波解を特徴づける最も重要なものとして分散関係式がある. これはその空間周期と速度の関係を述べたものである. 周期進行波解は新しい変数 $z=x-ct$ を導入し, z について T-周期解をさがすことに相当する. ここで c は周期進行波解の速度である. (4.40)はこの新しい変数に対し,

$$\epsilon^2 u_{zz}+\epsilon c u_z+f(u,v)=0 \qquad (4.44)$$
$$\epsilon\delta v_{zz}+c v_z+g(u,v)=0$$

とかきかえられる. 一般にこの方程式が T-周期解をもつのは c と T がある関係

$$c=H(T;\epsilon,\delta) \qquad (4.45)$$

をみたすときに限られるであろう. これは**分散関係式**(dispersion relation)とよばれる.

一般にこれを厳密に決定することは難しいが, 周期 T と速度 c について δ が大きくなければ図4.12のようになることが知られている([273], [72], [192], [193]). 周期 T が十分大きいところでは上の安定な枝の速度は単独パルスの速度 c_p に近いはずである. $\epsilon\ll 1$ のとき, (4.44)の周期進行波解は[133]で用いられたような接合漸近展開法により特異摂動的に構成できるが, その $\epsilon\to 0$ での特異軌道は図4.11(b)のようになる. ここで v_f, v_b はフロントとバックでの v の値であり, $c(v_f)=-c(v_b)$ をみたす.

$\delta=0$ の場合に周期 T とその速度 c の最低次での関係は

$$T=T_+ + T_- = c\left\{\int_{v_f}^{v_b}\frac{dv}{g(h_+(v),v)}+\int_{v_b}^{v_f}\frac{dv}{g(h_-(v),v)}\right\} \qquad (4.46)$$

で与えられる. これは外部展開の最低次

$$\begin{cases} f(u,v)=0 \\ cv_z+g(u,v)=0 \end{cases}$$

の第1式を $u=h_\pm(v)$ と解き, 第2式へ代入して積分すれば直ちに得られる. v_f が v_s に近づくと $g(h_-(v_f),v_f)\to 0$ より T_- は発散し, c は単独パルスの速

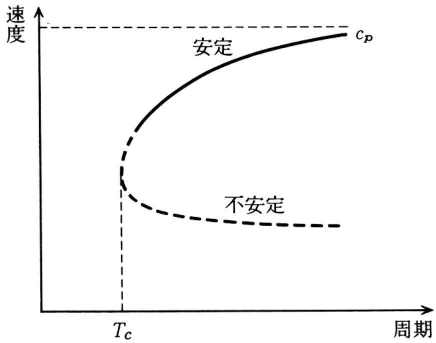


図 4.12 周期進行波解の分散関係式

度 c_p に近づく.

図 4.12 で特徴的なことは，周期が短くなると速度が減り，そして周期 $T=T_c$ のところで折れ曲がり点をもつ．周期進行波解はその手前で安定性を変え，T_c 以下では伝播する解はない．これは自然な結果である．なぜならパルス間周期が短くなると，抑制因子 v がパルス間にたまり，したがって命題 4.32 より伝播速度が落ちるからである.

実際，FitzHugh–Nagumo 方程式の場合に数値的に計算すると図 4.13 のように v がパルス間に蓄積され，対応する図 4.11(b)の特異軌道の v_f は上がり，ひしゃげたサイクルとなる．さらに短くなると閾値が極めて高くなり(いわゆる不応期にある状態)，刺激が加わっても興奮できず，伝播波は生じない.

接合漸近展開法と速度・曲率方程式

さて，いよいよ渦巻波について考えていくわけであるが，最大の困難はそれが真に 2 次元(動的)パターンであることである．それは図 4.8 のように外側の腕の部分と中心のコア部分とからなり，コア部分では曲率の効果は無視できない．その全体をもとの反応拡散方程式(4.40)の解として直接求めることはやさしいことではない.

そこで(4.40)の代わりにそれを ϵ に関して漸近展開し，その有限項のみを

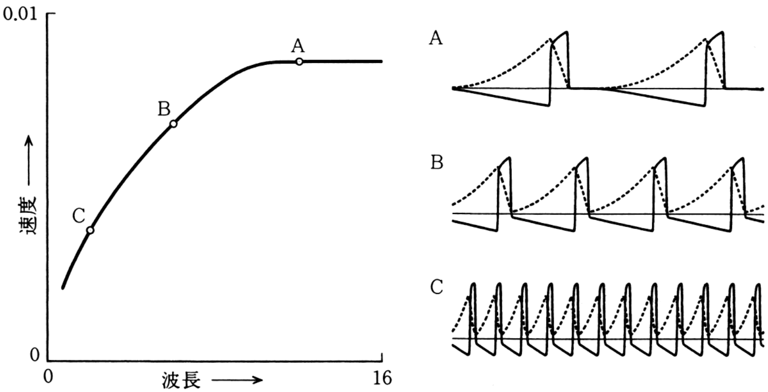


図 4.13 分散関係式と抑制因子 v の濃度

モデル方程式は図 4.10 と同じ．ただし $\gamma=0.0$，システムサイズ＝24.0 である．また v の濃度は 6 倍に拡大してある．A では v の濃度は隣のパルス付近でほとんど 0 となるが，B, C と間隔が短くなるにつれ高くなり，したがって速度は減少する．

採用した近似問題を解くことで渦巻波の振舞いを特徴づけることを考えよう．そのために次に一般的枠組みで接合漸近展開法を述べ，それより速度・曲率方程式という界面ダイナミクスの基本方程式を Fife [97] に沿って導く．

滑らかな関数 $u(x,t;\epsilon)$ がある微分方程式の解であるとし，それは小さなパラメータ ϵ にも依存しているとする(簡単のため，空間は 2 次元 $x=(x_1,x_2)$ とする)．これまで見てきたように u の挙動そのものを調べるよりも，ϵ が小さいことを利用して u から決まる内部遷移層 $\Gamma(t;\epsilon)$(しばしば界面ともよばれる)の運動を調べる方が幾何的にも明瞭であり，もとの問題のダイナミクスも露わになる．そのような運動がどのようなものかを(少なくとも形式的に)決定するのに最も有効な方法は，接合漸近展開とそれに伴う可解条件から界面方程式を導出するものである．このアイデアは古く，素朴であり，かつ構成的であるが，やや技術的煩鎖を伴うためかよく普及しているとはいえない(空間 1 次元のときは幾何学的特異摂動論([146])による取扱いが接合漸近展開と対をなす手法となる)．

ところで上で界面 Γ といったが，これは解 u が与えられたとしても($\epsilon>0$

のとき)一意には決まらない．実際それは幅 $O(\epsilon)$ をもち，われわれが定義しなければならない．通常それは内部問題の解のある等高面として定義される．その具体例は後に述べる．ここではその準備として界面 Γ が与えられている場合，それに伴う外部問題および内部問題の漸近展開がどのように定義され，かつそれらの間の両立条件(接合条件)が何かを述べる．

いま界面 $\Gamma(t;\epsilon)$ が平面上の曲線として与えられたとする．まず Γ の運動をその符号付き距離関数 $r(x,t;\epsilon)$ の発展として捉える．

$$\Gamma(t;\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r(x,t;\epsilon) = 0\} \tag{4.47}$$

Γ は $\mathbb{R}^2$ を 2 つの領域 $\mathcal{D}_\pm$ に分けるとし，r は $\mathcal{D}_+$ ($\mathcal{D}_-$) で正(負)とする．$\Gamma_\delta(t;\epsilon)$ を Γ の δ-近傍($|r| \leqq \delta$)とし，$\mathcal{D}_\delta(t;\epsilon)$ を Γ_δ の $\mathbb{R}^2$ での補集合とする．関数 u は Γ の外では $\epsilon=0$ まで込めて滑らかとするならば，次の**外部展開**でよく近似されるであろう．

$$u(x,t) \simeq \sum \epsilon^n u_n(x,t) \tag{4.48}$$

この意味は $u^{(N)}$ を N 次までの部分和とするとき，ある $\delta(N,\epsilon)$ がとれて，$\epsilon \to 0$ のとき $\delta \to 0$ であり，かつ

$$|u-u^{(N)}| = O(\epsilon^{N+1}), \quad \epsilon \to 0$$

が $\mathcal{D}_{\delta(N;\epsilon)}$ で一様に成り立つことである．この外部展開の各項 u_n は Γ で一般に不連続あるいは滑らかでない．しかし，$\mathcal{D}_+$ ($\mathcal{D}_-$) に限定すれば Γ まで込めて滑らかである．Γ 付近の u の様子を詳しく見るには，そこで局所直交座標系 $(r(x,t;\epsilon), s(x,t;\epsilon))$ を導入するのが便利である．ここで s は Γ に沿っての弧長である．さらに法線方向の引き延ばし座標 ρ を次で定義する．

$$\rho(x,t;\epsilon) \equiv \frac{r(x,t;\epsilon)}{\epsilon} \tag{4.49}$$

u の Γ 近傍での**内部展開**とは，u を (ρ,s,t) の関数 $u(x,t;\epsilon)=U(\rho,s,t;\epsilon)$ とみたときの U のベキ展開

$$U(\rho,s,t;\epsilon) \simeq \sum \epsilon^n U_n(\rho,s,t) \tag{4.50}$$

のことである．より正確には，ある $\epsilon \to 0$ のとき $K \to \infty$ となる，ある関数 $K(\epsilon,N)$ が存在して，部分和 $U^{(N)}$ に対して，$|u-U^{(N)}|=O(\epsilon^{N+1})$ が $|\rho| \leqq K(\epsilon,N)$ で一様に成り立つことである．

さて界面 Γ の r の正方向の法線速度 $\gamma(s,t;\epsilon)$ は $-r_t=-\dfrac{\partial r}{\partial t}(s,t;\epsilon)$ で与えられる．$-$ が付くことに注意しよう．Γ が (t,ϵ) に滑らかに依存するならば，(r,s) もそうであり，したがって γ も同様である．また，r が決まれば直交性と弧長であることより s も決まることに注意しよう．上で求めた外部展開 u_n と内部展開 U_n は，もともと同じ関数 u に対する展開であるので無関係ではありえない．実際，次の**接合条件**(matching condition)が要請される．$\rho\to\pm\infty$ のとき，

(4.51) $$U_0(\pm\infty,s,t)=u_0(0\pm,s,t)$$

(4.52) $$U_1(\rho,s,t)=u_1(0\pm,s,t)+\rho\partial_r u_0(0\pm,s,t)+o(1)$$

(4.53) $$U_2(\rho,s,t)=u_2+\rho\partial_r u_1+\frac{1}{2}\rho^2\partial_{rr}u_0+o(1)$$

ここで外部展開 u_n は x ではなく (ρ,s) の関数とみなしている．記号 $0\pm$ は s を固定して r 方向の $\mathcal{D}_\pm$ での Γ への極限を表す．この接合条件の導出についてはここでは述べないが([97]を参照)，例えば(4.51)は関数 u が連続的に内部から外部へつながるためには自然なものである．これらは後に U_n や u_n がみたすべき微分方程式の境界条件として重要な役割を果たす．

これら外部および内部展開をうまく組み合せてもとの微分方程式の真の解を構成できることは空間1次元の場合には多くの実例が知られている([94], [204], [133], [190]など)．これを**接合漸近展開法**という．

しかし空間多次元の場合には厳密な構成は難しく，したがって近似方程式の解析が現実的である．実際それはもとの現象の新たなモデルを与え，その解析により深い知見が得られる．あとの便宜上，座標系 (r,s) の性質およびラプラシアンのこの座標による表現を述べておく．まず Γ 上で

(4.54) $$|\nabla r|=1,\quad \Delta r=\kappa$$

である．∇ および Δ は共に空間変数 x に作用し，κ は Γ の曲率である．κ の符号は $\mathcal{D}_-$ からみて Γ が凹であるとき正と約束する．$|\nabla r|=1$ は Γ 上のみならず，r が定義されているところで常に成り立つ．

u を (r,s,t) の関数とみなしたとき，r,s は共に (x,t) の関数とみなされる

ので，ラプラシアンと時間微分は次のように書き換えられる．

$$\Delta u = \partial_{rr}u + \Delta r\partial_r u + \partial_s u\Delta s + \partial_{ss}u|\nabla s|^2 \tag{4.55}$$

$$\partial_t u = \partial_t u + r_t\partial_r u + s_t\partial_s u \tag{4.56}$$

ここで，むろん左辺の u は (x,t) の関数 $u(x,t)$ と見ている．

さて，接合漸近展開法を反応拡散系(4.40)に適用しよう．

以下では簡単のため $\delta=0$ の場合を考える．また変数の ϵ-依存性も誤解がない限り省略する．外部展開の最低次は

$$f(u_0, v_0) = 0 \tag{4.57}$$

$$\partial_t v_0 = g(u_0, v_0) \tag{4.58}$$

となる．f は双安定であるので(4.57)の解として，その2つの安定な枝を採用する．すなわち

$$u_0 = \begin{cases} h_-(v_0) & x \in \mathcal{D}_- \\ h_+(v_0) & x \in \mathcal{D}_+ \end{cases} \tag{4.59}$$

とする．

$$G_\pm(v) \equiv g(h_\pm(v), v) \tag{4.60}$$

と定義すると(4.58)より

$$\partial_t v_0 = G_\pm(v_0) \qquad x \in \mathcal{D}_\pm \tag{4.61}$$

を得る．したがって v_0 は各外部領域で常微分方程式に従って変動し，u_0 は(4.59)を通して決まる．内部展開の具体的な計算に入る前に界面 Γ は u の内部変数 U の零点集合に一致することに注意しよう．すなわち

$$U(0, s, t) \equiv 0 \tag{4.62}$$

がみたされている．ここでは界面 Γ は与えられたとして計算しているが，実際の応用においては(4.62)により界面の位置を定義することになる．また界面 $\Gamma(t)$ の点は座標 (s,t) で指定できるので，それを $X(s,t)$ とかく．Γ の近くの点は $X(s,t)+re_r$ とかける．e_r は Γ の $X(s,t)$ における単位法線ベクトルで r の増大する向きをとっている．(4.55),(4.56)を用いて内部変数

$U(\rho,s,t), V(\rho,s,t)$ がみたすべき方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}(4.63)\qquad r_t\partial_\rho U+\epsilon\partial_t U+\epsilon s_t\partial_s U &= \partial_{\rho\rho}U+f(U,V)+\epsilon\Delta r\partial_\rho U\\ &\quad +\epsilon^2(\partial_{ss}U|\nabla s|^2+\partial_s U\Delta s)\end{aligned}$$

$$(4.64)\qquad \epsilon^{-1}r_t\partial_\rho V+\partial_t V+s_t\partial_s V = g(U,V)$$

Γ の法線速度 γ は $-r_t$ で与えられ，Γ が (t,ϵ) に滑らかに依存するならば，(r,s) すなわち γ も ϵ でベキ展開できる $(\gamma=\sum\epsilon^n\gamma_n)$ ことを思い出せば，最低次は

$$(4.65)\qquad \partial_{\rho\rho}U_0+\gamma_0\partial_\rho U_0+f(U_0,V_0)=0$$

$$(4.66)\qquad \gamma_0\partial_\rho V_0=0$$

となる．第2式より明らかに $\gamma_0\neq 0$ ならば $V_0=V_0(s,t)$ は ρ に依存しない．

一方，接合条件(4.51)より V_0 は外部展開 v_0 の Γ の両側極限に等しくなり，これは v_0 の Γ での連続性をもたらす($\gamma_0=0$ のときは少々議論を要する．[97]参照)．したがって $V_0(s,t)=v_0(X(s,t),t)$ とかくことができる．(4.65)はすでに命題4.32で見た単独双安定型方程式であり，U_0 の接合条件の下での(4.65)の解は一意的に決まり，よって法線速度の第0近似 γ_0 はその進行波解の速度 c に一致しなければならない．すなわち

$$(4.67)\qquad \gamma_0=c(v_0(X(s,t),t))$$

$$(4.68)\qquad U_0(\rho,s,t)=\psi(\rho,v_0(X(s,t),t))$$

となる．ここで v_0 の値により一意にきまるフロント解を ψ とかいた．

内部問題の第1近似は次で与えられる．以下では $v_0(X(s,t),t)$ を $v_0(X,t)$ と略記することもある．

$$\begin{aligned}(4.69)\qquad &\partial_{\rho\rho}U_1+\gamma_0\partial_\rho U_1+f_u(U_0,v_0(X(s,t),t))U_1\\ &\quad =(-\gamma_1-\kappa(s,t))\partial_\rho\psi(\rho,v_0(X,t))-f_v(U_0,v_0(X,t))V_1\\ &\qquad +(\partial_t+(\partial_t s)\partial_s)\psi(\rho,v_0(X(s,t),t))\end{aligned}$$

$$(4.70)\qquad -\gamma_0\partial_\rho V_1=-(\partial_t+(\partial_t s)\partial_s)v_0(X(s,t),t)+g(U_0,v_0(X(s,t),t))$$

ここで，(4.69)の右辺第3項，および(4.70)の右辺第1項において現れる作用素 $(\partial_t+(\partial_t s)\partial_s)$ をかきかえよう．目標は $(\partial_t s)\partial_s$ 部分を陽に計算できる法線速度と v_0 の法線微分で表すことである．そのときに $v_0(x,t)$ は界面に沿って滑らかであるが(したがって添字 $\pm$ は省略してかいた)，法線微分は一般に不連続である．そこで v_0^+ (v_0^-) を $\mathcal{D}_+$ $(\mathcal{D}_-)$ を越えて全領域に滑らかに拡張したものを考えると

(4.71)　$(\partial_t+(\partial_t s)\partial_s)v_0^\pm(X(s,t),t)=\partial_2 v_0^\pm(X(s,t),t)+\gamma_0\partial_r v_0^\pm(x,t)|_\Gamma$

となる(詳しくは[97]参照)．$\pm$ のいずれを採用しても結果は同じものを与える．∂_2 は v の第2変数に関する微分を表し，したがって(4.61)よりそれは $G_\pm(v_0(X,t))$ に等しい．かくして(4.69),(4.70)は

(4.72)
$$\begin{aligned}&\partial_{\rho\rho}U_1+\gamma_0\partial_\rho U_1+f_u(U_0,v_0(X(s,t),t)U_1\\&\quad=(-\gamma_1-\kappa(s,t))\partial_\rho\psi(\rho,v_0(X,t))-f_v(U_0,v_0(X,t))V_1\\&\qquad+\psi_v(\rho,v_0(X,t))\big(G_\pm(v_0(X,t))+\gamma_0\partial_r v_0^\pm(x,t)|_\Gamma\big)\end{aligned}$$

(4.73)
$$-\gamma_0\partial_\phi V_1=-\gamma_0\partial_r v_0^\pm(x,t)|_\Gamma-G_\pm(v_0(X,t))+g(U_0,v_0(X(s,t),t))$$

となる．

さて，ここで可解条件を適用しよう．(4.72)の左辺の微分作用素を $\mathcal{L}$ とおけば，これは $L^2(\mathbb{R})$ における単純な零固有値をもつ．これは $p=\partial_\rho\psi(\rho,v_0)$ とすれば，$\mathcal{L}p=0$ であることより直ちにわかる．**可解条件**とは $\mathcal{L}q=f$ $(f\in L^2(\mathbb{R}))$ が $L^2(\mathbb{R})$ で解けるための必要十分条件は $\langle f,p^*\rangle_{L^2}=0$ が成り立つことである．ここで p^* は共役作用素 $\mathcal{L}^*$ の零固有値に対応する固有関数である．したがって(4.72)に対して適用すれば

(4.74)　$$(-\gamma_1-\kappa)A(s,t)+\widehat{B}(s,t)=0$$

を得る．ここで

(4.75)　$$A(s,t)=\langle p,p^*\rangle>0$$

(4.76)
$$\begin{aligned}\widehat{B}(s,t)=\langle p^*,[&-f_v(U_0,v_0(X,t))V_1\\&+\psi_v(\rho,v_0(X,t))(G_\pm(v_0(X,t))+\gamma_0\partial_r v_0^\pm(x,t)|_\Gamma)]\rangle\end{aligned}$$

である．かくして(4.67)および(4.74)より界面の速度は $O(\epsilon)$ までを採用すると

$$\gamma(X,t)=c(v_0(X,t))-\epsilon\kappa(X,t)+\epsilon\widehat{B}(s,t)/A(s,t) \tag{4.77}$$

となる．$O(\epsilon)$ の修正は界面の曲率からくるものと f や ψ の v-依存性からくる 2 つである．これは界面の**速度・曲率方程式**(あるいはアイコナル曲率方程式)とよばれる．

しかし，よく知られている形(例えば[152], [199])では(4.77)の右辺第 3 項は現れていない．それは f が v に依存しないという自明な場合を除いて陰に何らかの仮定がなされている場合が多い．例えば v は遅い変数であるとして，それを定数でおきかえて，f の v-依存性が消える場合がそうである．

より重要な場合は曲率が非常に大きく，結果として $\epsilon\kappa\gg\epsilon$ となるときである．このときは(4.77)の右辺第 3 項は高次項となる．この典型例を後に渦巻波の自由境界問題をリスケーリングを用いて導入するときにみる．むろんその場合にはリスケーリングに応じた ϵ のベキで速度・曲率方程式を再導出する必要がある((4.77)は $\kappa=O(1)$ という前提で導いている)．あとの便宜上，第 3 項を除いた速度・曲率方程式を次のより簡便な形でかいておく．

$$c_n(\boldsymbol{r}_I)=c(v(\boldsymbol{r}_I))-\epsilon\kappa(\boldsymbol{r}_I) \tag{4.78}$$

ここで $\boldsymbol{r}_I$ は界面の位置を表し，c_n はそこでの法線方向の速度を表す．上の速度・曲率方程式の右辺は媒質の分散性と Gibbs–Thomson 効果を加えたものとなっている．

第 1 項の $c(v(\boldsymbol{r}_I))$ は速度が v の値によって変化するのであるが，周期進行波解の分散関係(4.45)で見たように v の値と周期(波長)は連動しており，したがってこれは分散性を表している．第 2 項の曲率依存性は結晶成長をはじめさまざまなところに現れる項で，曲率に応じて速度を調節することで界面の平滑化に寄与しており，Stefan 型の結晶モデルにおける Gibbs–Thomson 効果としても現れる(第 3 章および[179], [180]参照)．とくに $c(v)$ が v によらず一定値 0 のときは(4.78)は平均曲率流に帰着する．分散性は双曲型方程式の，Gibbs–Thomson 効果は放物型(拡散)方程式のそれぞれの特性を表していると言える．

渦巻波の出現と特異点

定常な渦巻波を論ずる前になぜ自然発生的に渦巻が出現するのかを直観的に議論しておこう．安定な2次元パルス解が与えられたとし，そのまん中が切られ，図4.14ように2つの部分に分れたとしよう．

時定数の違いにより u はすみやかに $u=h^{\pm}(v)$ のどちらかに収束するとすれば，図4.14のように $h^{\pm}(v)$ のいずれをとるかに対応して，領域は滑らか，かつ有限な曲率を有する境界によって $\Omega^{\pm}$ に分割されるとしてよい．v は連続であるとすれば v_f と v_b をつなぐ界面のどこかに $v=v^*$ となる点 P が存在する．ここで v^* は $c(v^*)=0$ となる点，すなわち動かない点である(命題4.32参照)．

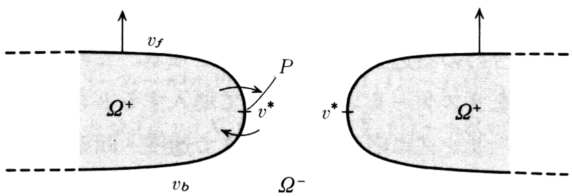


図4.14　欠陥からの渦巻波の発生

点 P のすぐ下の界面では $v>v^*$ であり，したがって $g>0$ となり，よって v が拡散しないとき($\delta=0$)は，v は $O(1)$ の速度で増大する．曲率があまり大きくなければ速度・曲率方程式(4.78)より P の下側の界面は Ω^+ に入り込む方向に進む．同様にして P の上側は反対に Ω^- に向かって進む．このプロセスが進むと P 付近の角速度は発散し，v は不連続となるであろう．同時に界面の曲率も非有界となり，速度・曲率方程式(4.78)も有効でなくなる．したがって P 付近では特異点が生成されることが予想される．しかし実際は曲率効果は無視できなくなるし，v が拡散するならば($\delta>0$)，その勾配は一定以下におさえられて，特異点は生成されないであろう．しかしその場合でも P 付近の定常的挙動は，上のように回転的となると考えられる．

上の思考実験をさらに続けると，P 点はほぼ定常的であり，そのまわりの界面は P を中心とする回転運動を行う．一方，P から十分離れた所では平面パルス解の形を保って一定速度で上に進むであろう．

これらを合せると P を中心とする渦巻きと一方向に進むパルス波をつなぐ図 4.15(a)のようなダイナミクスが自然に形成されると期待される．実際，BZ 試薬を用いた実験(図 4.15(b))において，そのプロセスは再現される．

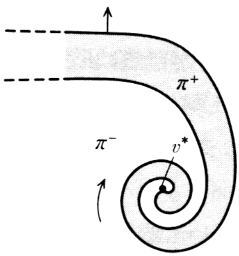
キネマティック方程式

速度・曲率方程式と(4.61)を用いて渦巻波を構成する前に，より単純化した幾何モデルの 1 つを紹介する．その基本的アイデアは渦巻波を端点をもつ 1 次元曲線の運動と捉えることにある．その運動は曲率によって与えられる法線速度および端点の接線速度によって決まる．そのとき渦巻波の腕の時間発展は曲率に関する偏微分方程式によって記述される．これは興奮領域の幅(腕の太さ)が極めて細く，コア半径が大きく，回転周期も長い場合の渦巻波の良い近似と考えられる．

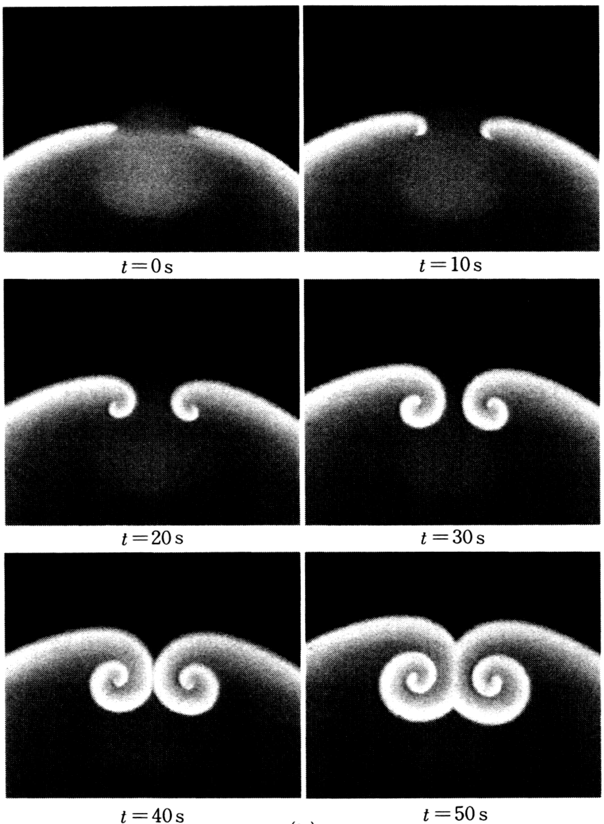
このような状況は必ずしも非現実的ではなく，次のような場合に実現されると考えられている．まずモデル方程式(4.39)で $\delta=0$ としよう．パラメータ ϵ はその値が小さいほど興奮の立ち上がりが速くなり，[64], [202]で述べられているように，ある $\epsilon=\epsilon_{c_2}$ があり，その値では図 4.14 の初期状態のような棒状の腕から出発すると先端は伸びも縮みもしない．これより ϵ が大きいと腕は縮み消えてしまう．この ϵ_{c_2} より少し小さい所ではコア半径は十分大きくなり，それに比べて腕は細く，上の近似が有効となる．

もう 1 つは高閾値の場合である．すなわち，ある閾値 H_c が存在し，これより $H=v^*-v_s$ が小さいと腕は伸びなくなる．H を H_c より少し大きくとれば最初の場合と同様に近似が有効となると考えられる．しかし，もとの反応拡散方程式系(4.39)の解との厳密な関係はほとんどわかっていない．

コア半径が大きく，かつ腕が細いということは最も粗い近似としては，それを 1 つのひもと考え，v の値はその上で一定とみなす．したがって，速度・曲率方程式(4.78)をみれば法線速度は第 1 近似として曲率のみに依存して変わるとしてよい．いま，端点 P をもつ半無限の曲線の運動を考えよう．よく知られているように一般に平面上を運動する曲線は曲率 K が端点から測った弧長 l で $K=K(l,t)$ と与えられれば決定できる(自然方程式)．



(a)



(b)

図 4.15　(a) 渦巻波と進行平面波，(b) BZ 反応の渦巻波の生成過程

曲線の運動のルールは次の2つである.

(i) 法線方向の速度 V はそこでの曲率 K のみに依存して決まる.

(ii) 端点 P の接線方向の伸縮 G もそこでの曲率のみに依存して決まる.

端点での曲率とは l を P から測った弧長とするとき, $\lim_{l\to 0} K(l)=K_0$ のことである. したがって, $G=G(K_0)$ とかける.

V, G が与えられるとそれから $K(l,t)$ の発展方程式は次で与えられ, **キネマティック方程式**(kinematic equation)とよばれる.

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\left(\int_0^l VK\,dl'+G\right)\frac{\partial K}{\partial l}=-K^2V-\frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \tag{4.79}$$

これは曲率の極座標表示および弧長の変化は曲率の変化によるものと端点の伸縮からくるものとの和

$$dl=\left(\int_0^l KV\,dl'\right)dt+G\,dt$$

で表されることに注意すれば導出できる(詳しくは例えば[64]を参照).

V, G は, 例えば

$$V=V_0-DK \tag{4.80}$$

$$G=\gamma(K_{c_2}-K_0) \tag{4.81}$$

を採用することができる. ここで D, γ は正定数である. この K_{c_2} は速度・曲率方程式での法線速度が0となる曲率と関連するが, ここでは詳しくは述べない([202]参照).

以下での目標は, 定常渦巻波の角速度がどのように決定されるかである. それを[202]に従って述べよう. まず(4.79)の定常渦巻波を求めよう. その場合には端点 P での伸縮はないもの, すなわち境界条件として

$$K_0=K_{c_2} \tag{4.82}$$

を採用するのがふさわしい. したがって, $G\equiv 0$ となる. また遠方では平面波に近づくとして

$$\lim_{l\to\infty} K(l)=0 \tag{4.83}$$

を課する．以上より定常解は

$$\left(\int_0^l VKdl'\right)\frac{\partial K}{\partial l} = -K^2V - \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \tag{4.84}$$

となるが，これは1回積分することより

$$\frac{dV}{dl} + K\int_0^l VKdl' = \omega \tag{4.85}$$

となる．積分定数 ω は求めている渦巻解の角速度を与える．実際，上より $\omega = (dV/dl)_{l=0}$ である．境界条件(4.82), (4.83)と上の(4.85)は角速度 ω を決定する**非線形固有値問題**となっている．ここで無次元化した変数 $\kappa = K/K_{c_2}$, $y = K_{c_2}l$ を導入し，(4.80)を用いて(4.85)をかきかえると

$$\kappa\int_0^y \kappa(1-\beta\kappa)dy' = \Omega + \beta\frac{d\kappa}{dy}$$

となる．ここで $\Omega = \omega/V_0K_{c_2}$, $\beta = DK_{c_2}/V_0$ であり，境界条件は

$$\kappa(0) = 1, \quad \lim_{y\to\infty}\kappa(y) = 0$$

となる．まず境界条件は忘れてコア半径が十分大きく，曲率の影響が小さい場合の極限に対応する，(4.80)の $D=0$, すなわち上で $\beta=0$ のときをまず考えよう．このとき，$\kappa\int_0^y \kappa dy = \Omega$ となるので

$$\kappa(y) = \left(\frac{\Omega}{2y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

となる．これは遠方での境界条件はみたすが，$\kappa(0)=1$ はみたさない．これはコア付近では曲率効果を無視できないことを示している．これは円の伸開線を表しており，十分遠方 $y \gg 1$ ではピッチが $2\pi/\Omega$ の Archimedes ラセンに近づく．$l=0$ での境界条件をみたすためには，速度 V が曲率に依存する $\beta \neq 0$ の場合を考えねばならない．数値的には Ω は β の関数として求められ，β が小さければ

$$\Omega \approx 0.685\beta^{\frac{1}{2}} - 0.06\beta - 0.293\beta^2 + \cdots$$

と近似される．そのときの回転周期 T_0 は

$$T_0 = \frac{2\pi D}{V_0^2 \beta \Omega(\beta)} \tag{4.86}$$

と表される．かくして角速度は(4.86)から決定されるが，これを現実の BZ 反応のそれと比較するのはやや無理がある．それは最初に述べたようにキネマティック方程式の導出の際の前提条件を実現するのが困難であり，したがって(4.86)の右辺のパラメータをどのように設定するのが自然であるかはっきりしないからである．

スケーリングと自由境界問題

渦巻波は**フロント**と**バック**とよばれる 2 つの界面で囲まれた**興奮領域**とその残りの休止領域とからなり，ある半径 r^* の渦巻波の先端で，これら 2 つの界面は出会う(図 4.16)．第 3 章の結晶成長の場合と同様に，渦巻波における最も基本的な問題はその**形状**と**角速度**がモデル方程式からどのように決定されるかを知ることである．

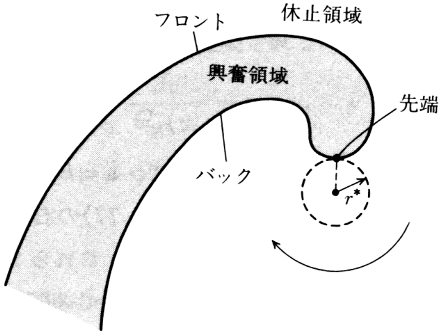


図 4.16 渦巻波の先端

渦巻解を構成する際の難しさはコア付近とその外側とで解の振舞いが異なることに起因する．より詳しく言えば，外側では 1 次元的な周期進行波解に近く，曲率効果は小さい．一方，コア付近は真に 2 次元パターンであり，曲率効果は本質的となる．

歴史的には 1 次元的な周期進行波解からの摂動という立場から渦巻解の解

明が始められたが，これを脱却して真に2次元パターンを捉える試みが80年代中頃から始まった．その際に最も議論されたのは渦巻解の全容を知るにはどのような**時空間および未知変数のリスケーリング**がふさわしいかということであった．

われわれは $\epsilon\to 0$ の極限で興奮領域と休止領域を峻別する界面を通じて，その運動を理解しようという立場であるが，そもそもコア付近で，そのような界面が定義できるのかどうかも前もって明らかでない．したがって界面方程式によるアプローチが有効であるかどうかという反省から始める必要がある．後に重要となるFifeスケーリング([96], [97])とよばれるものも，その考察から自然に出てくるものである．すでにわれわれはスケールの違いを利用して縮約をおこなっている．すなわち，u と v の時定数の違いを利用して反応拡散方程式(4.40)から速度・曲率方程式と v の発展方程式を組み合せた界面ダイナミクス(4.61), (4.77)へ移行した．

v の拡散がない場合の界面方程式をもう一度かくと

$$\frac{dv}{dt}=G_{\pm}(v) \tag{4.87}$$

および速度・曲率方程式

$$c_n=c(v)-\epsilon\kappa \tag{4.88}$$

であった．ここで $G_{\pm}(v)=g(h_{\pm}(v),v)$ であり，$u=h_{\pm}(v)$ はそれぞれ興奮および休止領域に対応するものであった．また(4.77)の右辺の f の v-依存性からくる項も省略した(これは後に正当化される)．これら2つの領域は**界面** $\boldsymbol{\Gamma}$ によって分けられていて，v は Γ を込めて全領域で連続なものでさがすとする．

さて自由境界問題の設定，とくに速度・曲率方程式はどのような意味において有効なものであろうか．以下2つの場合に分けて考えよう([199]参照)．

(i) 高閾値極限

速度・曲率方程式が有効であるための条件の1つは，曲率半径は界面の厚さより十分大きくなければならない(速度・曲率方程式の導出の節を参照)．とくに曲率半径が最小となる先端においてもこれは成り立っているべきであ

る.

(4.89)　$$R_{\rm tip} \gg O(\epsilon), \quad R_{\rm tip} = \kappa(r^*)^{-1}$$

しかし具体的には $R_{\rm tip}$ は ϵ と共にどのように振舞い，上の大小関係は ϵ がどの程度小さければ成り立つのであろうか．先端では法線速度は零である．かつそこで $v=v_s$ (平衡点)であるとしよう．コア半径を r^* とすれば $0=c(v_s)-\epsilon\kappa(r^*)$ となるから，(4.89)は次と同値である($c(v_s)>0$ に注意).

(4.90)　$$c(v_s) \ll 1$$

これは v_s が v^* に極めて近い，すなわち

(4.91)　$$H = v^* - v_s \ll 1$$

であることを意味する．H は興奮閾値のレベルを表し(H が小さいほど閾値は高い)，(4.91)は高閾値であることを要求している．v^* のまわりで $c(v_s)$ を展開すれば，$c(v_s)\sim v^*-v_s$ を得る．いま先端から距離 $O(R_{\rm tip})$ 以上離れたところで測った興奮領域の幅 λ_+ は

$$\lambda_+ \sim R_{\rm tip}$$

と考えられる．一方，$\lambda_+\sim c(v_s)T_+$ および $R_{\rm tip}\sim\epsilon c(v_s)^{-1}$ である．ここで T_+ は興奮領域の持続時間であり，次で定義される.

$$T_+ = \int_{v_f}^{v_b} \frac{dv}{G_+(v)} \sim v_b - v_f \sim v^* - v_s$$

したがって，$c(v_s)^2T_+\sim\epsilon$，よって

$$H \sim \epsilon^{1/3}$$

を得る．同時に

(4.92)　$$R_{\rm tip} \sim \epsilon^{2/3}, \quad T_+ \sim \epsilon^{1/3}, \quad c(v_s) \sim \epsilon^{1/3}$$

もわかる．よって $\epsilon^{1/3}\ll 1$ となるように ϵ を小さくとれば(4.90)が成り立ち，したがって(4.89)が $\epsilon^{2/3}\gg\epsilon$ という意味で成り立つ．この結果はコア付近では v は v^* を中心に $\epsilon^{1/3}$ で，空間は $\epsilon^{2/3}$ で，時間は $\epsilon^{1/3}$ でリスケーリングすればよいことを示唆している.

このことは最初に Fife [95] により指摘され，[149] によってその有効性が示されたので **Fife スケーリング**とよばれる．ここで速度・曲率方程式(4.77)の $O(\epsilon)$-項の1つである f の v-依存性からくる第3項を無視できる根拠が明

らかとなる．すなわちコア付近では曲率項は $O(\epsilon)$ ではなく $O(\epsilon^{1/3})$ となるからである．実はこのスケーリングが全域で成り立つべきであると主張するのが次に述べる低閾値の場合である．

(ii) 低閾値極限

いままでの考察は v がコア付近で $v=v_s$ という値をとるという仮定でおこなってきた．その結果，(4.89)が成り立つためには高閾値の興奮性媒質を考える必要が出てきた．しかし，一般的には v はコア近傍で v_s には近くない．とくに低閾値の(極めて興奮性が高い)媒質ではある程度抑制物質 v の濃度が高くてもパターンを保持できると予想される．実際，このことは[278]によって数値的に示唆され，実験から決まる角速度ともよく合う．

(4.90)が成り立つには $v^*-v_f(r^*)\ll 1$ が今度は必要となる．低閾値の媒質では (u,v) が十分回復して平衡点近くに戻っていなくとも，反復的に興奮できるので，$v^*-v_f\ll 1$ が**渦巻波の全体**で成立していると仮定しても不自然でない．実際，上と同じような議論により，

$$v^*-v_f\sim\epsilon^{1/3}\ll 1,\quad c(v_f)\sim\epsilon^{1/3}\ll 1$$

というスケーリングが低閾値の媒質ではふさわしいことがわかる([97]参照)．これより空間スケールは $O(\epsilon^{2/3})$ なので角速度は $\omega\sim\epsilon^{-1/3}$ というオーダーになる．

結局いずれの場合も，平衡点 v_s の位置を別にすれば同じタイプのリスケーリングを要請している．

角速度選択問題

角速度選択問題にとりかかろう．われわれは前節(ii)の低閾値極限の場合を調べることにする．時空および未知関数に施すスケーリングは次である．

$$v-v^*=\epsilon^{1/3}\tilde{v},\quad x=\epsilon^{2/3}\tilde{x},\quad t=\epsilon^{1/3}\tilde{t} \tag{4.93}$$

これは v はほとんど v^* であり，空間は $\epsilon^{2/3}$ で引き延ばし，時間は $\epsilon^{1/3}$ の遅いスケールで見ることを意味する．遷移層の厚さが $O(\epsilon)$ であったので，上の空間スケールはそれよりは粗く，したがって，$O(\epsilon)$-サイズのコアの微細構造をこのスケーリングですべて知るには限界があることを注意しておこう

(しかし一方，もし $O(\epsilon)$ の空間リスケーリングを実施すれば，今度はコア近傍はよく見えるが外部は見えなくなる)．(4.93)により

$$c(v_I) \simeq \epsilon^{1/3} c_v \tilde{v}_I, \quad c_v = \left.\frac{dc(v)}{dv}\right|_{v=v^*}$$

と近似されるので，(4.88)は ~ を取り去った後，その主要部は

$$c_n(\boldsymbol{r}_I) = c_v v(\boldsymbol{r}_I) - \kappa(\boldsymbol{r}_I) \tag{4.94}$$

とかける．スケール以前の表現(4.88)では曲率の前に ϵ があったが，Fife スケーリングは**すべての項の寄与が対等となる**リスケーリングとなっている．このことは§4.2(d)でみたポリマーや Turing パターンのメゾスコピックパターンの考察と共通するものがある(第5章参照)．

一方，v の方程式の非線形項は上のスケーリングの主要部は至るところ $v=v^*$ なので，第0近似として $G_\pm(v^*)=g(h_\pm(v^*),v^*)$ という符号の異なる2定数となる．これを $g^\pm$ とかこう．すると

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g^\pm \tag{4.95}$$

を得る(~ は省略した)．この右辺は v には依存しない．(4.94),(4.95)は ϵ **に依存しない**リスケーリングされた自由境界問題を与える．定常回転する渦巻解がみたす方程式を回転座標系でかき直すと

$$\begin{cases} c_n(\boldsymbol{r}_I) = c_v v(\boldsymbol{r}_I) - \kappa(\boldsymbol{r}_I) \\ \omega \dfrac{\partial v}{\partial \theta} + g^\pm = 0 \end{cases} \tag{4.96}$$

となる．ここで t の変換に応じて新しい角速度 $\omega \equiv \epsilon^{-1/3}\tilde{\omega}$ を導入した(しかし ~ は(4.96)では省略した)．ω は未知パラメータであることに注意しよう．第2式を積分すると

$$v^\pm(r,\theta) = -g^\pm\theta/\omega + b^\pm(r)$$

を得る．ここで $b^\pm(r)$ は積分定数である．興奮領域と休止領域は2つの界面 $\theta^\pm(r)$ で分けられている(図4.17参照)．それらは $r\to+\infty$ では $\theta(r)\sim r$ をみたすとする(Archimedes ラセン)．さらに界面上では v は連続とする．すなわち $v^+(\theta^+(r))=v^-(\theta^-(r))$，$v^+(\theta^+(r))=v^-(2\pi+\theta^-(r))$ とする．この条件

から興奮領域の幅 $\Delta\theta(r) \equiv \theta^-(r) - \theta^+(r)$ が

$$\Delta\theta = \frac{2\pi g^-}{g^- - g^+} \tag{4.97}$$

と決まる．これは r には依存しない．したがって2つの界面は一定の角度のシフトで移り合う．界面上での v の値 $v_I(\theta^\pm(r))$ を求めよう．渦巻波は定常パターンゆえ $c_n(\theta^+(r)) = -c_n(\theta^-(r))$ がみたされていなければならない．対称性から $\kappa(\theta^+) = -\kappa(\theta^-)$ であり，よって界面方程式から，v の $\theta^\pm(r)$ での値も反対符号となる．以上より

$$v_I(\theta^\pm(r)) \equiv v_I^\pm = \pm\frac{g^+g^-\pi}{\omega(g^+ - g^-)} \tag{4.98}$$

と定まる．これより v の界面上での値は r によらない．

求まった渦巻波は図4.17のように先端(原点)でカスプ状の特異点をもち，かつ v の値もそこで不連続となる．このことは特定のリスケーリングを採用したことによる必然の結果といえるが，直ちにこのことが後に論じるように角速度選択問題に対する上の定式化の破綻を意味するものでは決してない．この特異性を排除するためには $r=0$ での別のリスケーリングおよび v の拡散効果の導入が必要となるがここでは論じない(注意4.35参照)．

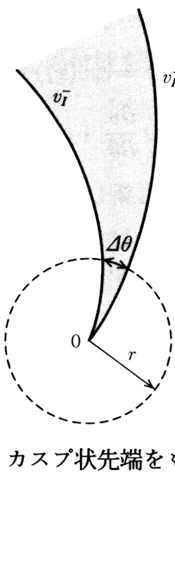


図4.17　カスプ状先端をもつ渦巻波

渦巻波の形状決定のため，$\theta^+(r)$ がみたすべき常微分方程式を導こう．曲率と法線速度を計算すると

$$\kappa = -\frac{1}{(1+\psi^2)^{3/2}}\frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r\sqrt{1+\psi^2}}$$

$$c_n = \frac{\omega r}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

となる．ここで $\psi(r) = r\dfrac{d\theta_+}{dr}$ である．これらを界面方程式(4.96)に代入し，(4.98)を用いると，ψ に関する次の方程式が得られる．

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \left(\rho - \frac{\psi}{\rho}\right)(1+\psi^2) - B(1+\psi^2)^{3/2} \tag{4.99}$$

ここで，$\rho = \sqrt{\omega}\,r$，$B = c_v v_I^+/\sqrt{\omega}$ である．これを次の境界条件で解く．

$$\psi(\rho) \sim \rho, \quad \rho \to \infty, \quad \psi(0) = 0 \tag{4.100}$$

結局，角速度選択問題は，方程式(4.99)の境界条件(4.100)の下での B，すなわち ω に関する**非線形固有値問題**を解くことに帰着された．ここでは詳しくは述べないが，この固有値問題は一意的な解をもち，シューティング法により，B の値はおよそ 1.738 となる．この B を用いて渦巻波の角速度は

$$\omega^* = \left(\frac{c_v g^+ g^- \pi}{B(g^+ - g^-)}\right)^{2/3} \tag{4.101}$$

で与えられる．同時に先端以外の形状については上の解によって完全に決定された．

上の解は $r \to 0$ で特異性(v は先端で不連続となり界面はカスプ状となる)をもった．したがって，これを補正するためにはもとの反応拡散方程式に戻り，$\boldsymbol{x} = \epsilon\tilde{\boldsymbol{x}}$ とスケールして内部問題を導き，それを解くことが不可欠となる．一般に，どのようなスケーリングを採用するにせよ，もとの反応拡散方程式の解のコア付近では興奮領域の幅と界面の幅とはほぼ同等となり，ある特定のスケーリングを採用した極限問題の解だけではその全容は捉えきれない．

言いかえれば，着目しているある量を特徴づけるためには，それにふさわしいスケーリングを見つけるべきであり，そのとき他の情報のある部分は落とされてしまう．

その意味で**角速度選択問題**の解については，Fife スケーリング後の**外部問題のみを解くことでその主要部は正しく導かれていると考えられている**．実際，もとの反応拡散方程式の解との関係や渦巻解の安定性については現在，研究が精力的に行われており(例えば[159], [160], [149], また[19], [239]も参照)，近い将来それらの関係は明らかにされるであろう．

注意 4.35　上の Fife スケーリングによって得られた解は先端で特異点をもった．先端 $r=r^*$ で界面が滑らかにつながるという境界条件は，(4.99)と同様に定義したフロント $\theta=\psi_f(r)$，バック $\theta=\psi_b(r)$ の界面に対し，$\Delta(r)=\psi_f(r)-\psi_b(r)$ として

$$\Delta(r^*)=0, \quad \psi_f(r^*)=+\infty, \quad \psi_b(r^*)=-\infty \tag{4.102}$$

で与えられる．この条件の下での(4.87)および(4.88)の解の存在を厳密に示すことは Keener [153]によってなされた．その際 $G^\pm$ が v に真に依存する(上述の $g^\pm$ は定数であった)ことが本質となる．(4.102)の最初の条件は2つの界面のフロントとバックが $r=r^*$ で出会うという条件であり，残り2つは共に動径方向に直交して(したがって滑らかに)出会うという条件となっている．この場合も解くべき問題は，角速度 ω と r^* に関する2つの界面 ψ_f および ψ_b のみたす常微分方程式系の非線形固有値問題となる．注意すべきは，ψ_f と ψ_b を求めるときの出発点となる解は $\psi_f\equiv\psi_b$，すなわち(4.99)の解 ψ (ただしスケールはもとに戻す)であり，そこからシューティング法と比較定理を巧みに用いて摂動的に境界条件(4.102)をみたすように作るのである．

注意 4.36　Fife スケーリングとは異なるスケーリングとして，例えば Keener [154]によるものがある(非線形性は奇関数対称を仮定するので，もはや興奮系ではないが)．これはコア部分を $\tilde{x}=x/\epsilon^{1/2}$ というオーダーで見るものであり，しかも v の拡散を考察している($\delta>0$)．しかし結果として得られる自由境界問題は $\epsilon^{-1/2}$ で発散する係数をもつ．したがって十分小さい ϵ の所ではなく，少し大きい ϵ でより有効な近似になると思われる．

注意 4.37 (渦巻波の不安定化と meandering)　渦巻解の安定性については，v が拡散する場合もしない場合も $\epsilon\to 0$ の極限系に対して，外部領域とコア領域に分けて[160]が数値的に調べている．それによれば，コア部分は不安定化する．しかしそれは単独の実固有値が不安定化するという結果であり，実験やシミュレーションで観察される Hopf 分岐による通常の2重周期型の meandering とは異

なる．ϵが少し大きくなると他の固有値と合体して複素化し，それがHopf分岐を引き起こしているとも考えられるが詳細はわかっていない．

このような不安定化にかかわらず，上で議論した角速度選択問題の結果は有効であると考えられる．なぜなら上の不安定化はコア領域に限定され，外部領域に影響を与えないと考えられるからである([160]参照)．しかし，その厳密な正当化はこれからの課題である．

《要約》

4.1　パターン形成を身近な例を用いて説明した．

4.2　勾配系におけるダイナミクスを無限次元力学系の立場から簡単に述べた．保存系や非局所項をもつ場合も議論した．

4.3　開放系のダイナミクスをTuring系と興奮系の場合について述べた．渦巻波の角速度決定においてスケーリングの考えが有効であることを示した．また接合漸近展開法の具体的計算法についても述べた．

5 特異極限法

われわれがあるパターンを見るとき，それは状態が急激に変化するところ(水と氷)あるいは異質なものが隣り合う境界(水と油)の動きで，その振舞いを理解することが多い．全体を見るのではなく，それら界面の動きにダイナミクスが集約されていると考えるのである．特異極限法は，全体のダイナミクスの情報がどのように界面に集約されているかを明らかにするのに役立つ．第1章および第4章でも触れたように，どのようなスケールで見るかによりさまざまな特異極限が存在する．逆にこれによりこれまで述べてきたいろいろなモデル方程式が相互に関連していることもわかる．一方，極限系として得られた界面方程式の解析も近年大きな進歩があった．最初にその典型例としての平均曲率流をとりあげて考えていこう．

§5.1 平均曲率流

パターン形成のダイナミクスを考える上で界面の動きを知ることは極めて重要であった．この節では最も単純ではあるが，基本的かつ重要な平均曲率流について議論する．ここで述べる等高線法は特異点が生成された後も有効であり，のちに双安定単独反応拡散方程式の特異極限が平均曲率流であることを示すときにも有用となる．

(a) 平均曲率流とは

Γ_0 を $\mathbb{R}^n$ の中の $(n-1)$ 次元の閉じた滑らかな超曲面とする．これが法線方向に各点での平均曲率に比例する速度で時間 t と共に運動していくとき，その超曲面の族 $\{\Gamma_t\}_{t\geqq 0}$ を Γ_0 から出発した**平均曲率流**という．より正確には $\boldsymbol{N}$ を Γ_t の(内側から外側に向かっての)単位法線ベクトル，κ をこの $\boldsymbol{N}$ に沿っての平均曲率，すなわち $\kappa_i\ (i=1,\cdots,n-1)$ を主曲率とし，

$$\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_{n-1} \tag{5.1}$$

と定めるとき，その法線速度 V が

$$V = \kappa \boldsymbol{N} \tag{5.2}$$

で与えられる運動である．この方程式は平均曲率流方程式とよばれる $\kappa = -\mathrm{div}(\boldsymbol{N})$ であるから，これは

$$V = -\mathrm{div}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} \tag{5.3}$$

ともかける．ここで発散(div)をとるときベクトル場 $\boldsymbol{N}$ は Γ_t の外側にも滑らかに拡張しておく．

注意 5.1 (等速成長の方程式)　$c>0$ を定数として方程式

$$V = c \tag{5.4}$$

は外側に一定の速さ c で成長する曲面の運動を表す．一見単純であるが，滑らかな曲面 Γ_0 から出発しても有限時間で特異点が出現する．第4章で速度・曲率方程式を導入したが，それは上の2つの運動(5.2),(5.4)を組み合せたものになっている(むろんそのときは c は定数ではなく，かつ符号も一定ではない)．

(b) 符号付き距離関数とそれがみたす偏微分方程式

いま平均曲率流(5.2)が $0\leqq t\leqq t_*$ において滑らかな解 Γ_t をもつとし，さらに有界開集合 U_t がとれて

$$\Gamma_t = \partial U_t, \quad 0\leqq t\leqq t_* \tag{5.5}$$

とできるとする．このとき，

定義 5.2　$t\geqq 0$ に対し

$$(5.6)\qquad d(x,t)=\begin{cases}\operatorname{dist}(x,\Gamma_t) & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{U}_t\\ -\operatorname{dist}(x,\Gamma_t) & x\in U_t\end{cases}$$

と定義する．d は $\{\Gamma_t\}_{0\leqq t\leqq t_*}$ の**符号付き距離関数**とよばれる．　□

上で $\{\Gamma_t\}_{0\leqq t\leqq t_*}$ は滑らかに存在すると仮定したが，写像 $x\mapsto d(x,t)$ は Γ_t の法線ベクトルが一般に重なり合うので必ずしも滑らかではない．しかし，Γ_t の十分近くに限れば滑らかとなるので，以下そのような領域に限定する．

d は Γ_t によって決定されるので，d は Γ_t の幾何的情報を含んでいるはずである．以下の目標は d の 2 階までの微分を考察することにより，その情報を d の微分方程式の形に陽に表すことである．

いま x を Γ_t の十分近くにとり $d(x,t)>0$ とする．このとき一意的に $y\in\Gamma_t$ がとれて $d(x,t)=|x-y|$ とできる．y における Γ_t の外側単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ は

$$(5.7)\qquad \boldsymbol{N}=Dd(x,t)$$

となる．

Γ_t の曲率の情報は，2 階微分 D^2d に含まれている．D^2d の固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とかくと，Γ_t の y における主曲率 κ_i $(i=1,\cdots,n-1)$ は(必要なら順番を入れ替えて)

$$(5.8)\qquad \kappa_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i d-1}\quad (i=1,\cdots,n-1),\quad \lambda_n=0$$

とかき表せる([112]参照)．さて $d(x,t)>0$ となる点 x を固定する．

$$(5.9)\qquad \begin{aligned} d_t &= -V\cdot\boldsymbol{N}\\ &= -\kappa\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i d}\end{aligned}$$

$d(x,t)\leqq 0$ についても同様である．よって，Γ_t の近くにおいて

$$(5.10)\qquad d_t=F(d,D^2d)$$

とかける．ここで F は X を $n\times n$ 実対称行列 $\boldsymbol{S}^n$，Λ をその固有値 $\Lambda(X)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ とするとき

$$F(p,X) = f(p,\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i p} \tag{5.11}$$

で定義される．ここで分母が常に $1-\lambda_i d>0$ となるように Γ_t の近くで考えるとする．

さて領域 $\{d>0\}$ において，$\lambda_i \geqq 0$ ならば $\lambda_i/(1-\lambda_i d) \geqq \lambda_i$ が成り立ち，さらに $\lambda_i \leqq 0$ であっても，同様に $\lambda_i/(1-\lambda_i d) \geqq \lambda_i$ が成り立つ．したがって

$$0 = d_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i d} \leqq d_t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = d_t - \Delta d \tag{5.12}$$

すなわち

$$d_t - \Delta d \geqq 0 \qquad \{d \geqq 0\} \text{ において} \tag{5.13}$$

が成り立つ．同様に

$$d_t - \Delta d \leqq 0 \qquad \{d \leqq 0\} \text{ において} \tag{5.14}$$

も成り立つ．よってとくに

$$d_t = \Delta d \qquad \Gamma_t \text{ 上} \tag{5.15}$$

が成り立つ．後述するように，この方程式は粘性解の意味で全領域 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ で成り立つ．またこの形から平均曲率流による曲面の運動は幾何的熱方程式とよばれる．(5.10)の右辺の非線形性を調べよう．

$p \in \mathbb{R}$ を固定し，$A, B \in \boldsymbol{S}$ が $A \geqq B$ であるとき，すなわち $\lambda_i(A) \geqq \lambda_i(B)$ $(i=1,\cdots,n)$ ならば

$$F(p,A) = f(p,\Lambda(A)) \geqq f(p,\Lambda(B)) = F(p,B) \tag{5.16}$$

が成り立つ．これは $\partial f/\partial \lambda_i(p,\lambda) = 1/(1-\lambda_i p)^2 > 0\ (1 \leqq i \leqq n)$ であることにより直ちに導かれる．この単調性により後に F は(退化)楕円型とよばれる(§5.2参照)．

さて，これまでは平均曲率流があるとして方程式(5.10)を導いてきたが，逆に滑らかな Γ_0 から出発するとき十分小さい $t_0>0$ に対しては古典解の平均曲率流 $\{\Gamma_t\}_{0\leqq t\leqq t_0}$ が存在することを示すことができる．すなわち，$g(x)$ を Γ_0 の符号付き距離関数とし，$V=\{x\in\mathbb{R}^n \mid -\delta_0<g(x)<\delta_0\}$，$W=V\times(0,t_0)$，$\Sigma=\partial V\times[0,t_0]$ とする．ここで δ_0 は $\bar{V}$ で g が滑らかとなるように小さくとる．

そして次の初期値・境界値問題を考える.

$$
(5.17)\qquad \begin{cases} v_t = F(v, D^2v) & W\text{ 内} \\ |Dv|^2 = 1 & \Sigma\text{ 上} \\ v = g & V\times\{t=0\}\text{ 上} \end{cases}
$$

$\{\Gamma_t\}_{0\leqq t\leqq t_0}$ が古典的な平均曲率流**ならば** $v=d$ は(5.17)をみたすが，ここでの主張は，(5.17)は t_0 が十分小さければ古典解 $v\in C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{W})\cap C^{\infty}(W)$ をもつということである．さらに，$\{\Gamma_t\}_{0\leqq t\leqq t_0}$ を

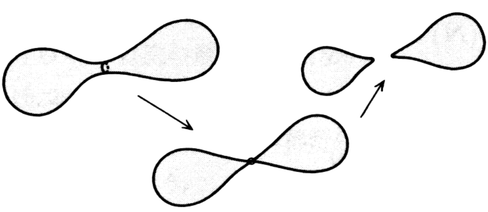
$$
(5.18)\qquad \Gamma_t = \{x\in V \mid v(x,t)=0\} \quad (0\leqq t\leqq t_0)
$$

と定義すれば，$v(\cdot,t)$ はこの Γ_t への符号付き距離関数になっている([91]参照)．すなわち，平均曲率流という幾何的問題を偏微分方程式(5.17)の解の存在問題に帰着することができた.

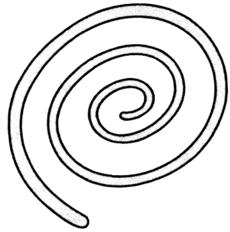
§5.2 等高面法と粘性解

(a) 等高面法の考え方

平均曲率流にしたがって動く曲面は十分滑らかな初期値から出発しても，特異点が有限時間で生じる．例えば球面から出発しても有限時間で1点に収縮するし，また図5.1(a)のようなまん中がくびれた2次元曲面から出発すれば，やはり有限時間でちぎれるであろう．このような特異点を越えて一般



(a)



(b)

図5.1 (a)平均曲率流による $\mathbb{R}^3$ における特異点の発生，(b)2次元では特異点は生じず，1点に収縮する.

化された平均曲率流が自然に定義できるであろうか．

注意 5.3　2次元平面内の閉曲線から出発した場合は，たとえそれが図 5.1(b) のように凸でなくとも，必ず凸になり，有限時間で1点に収縮することが微分幾何的に証明できる(詳しくは[115]参照．また[132],[105]も見よ)．

§5.1 では距離関数を通して，平均曲率流を偏微分方程式(5.17)に書き換え，超曲面の動きを等高面 $v=0$ によって捉えることができた．実はこの見方は古典解の範囲にとどまらず，特異点も含む広い範囲で有効となる．直観的には等高面のレベルでさまざまな特異点が生じても，それを生み出す関数そのものは十分滑らかであろうと期待されるからである．

この等高面による考えは，すでに物理学者，太田–Jasnow–川崎による論文[230]で現れており，後年 Osher–Sethian [235]により平均曲率流の数値計算のためにも導入された．

等高面法の基本的アイデアは，曲面 Γ_t をある関数 u のレベル 0 の等高面とみなし，その運動方程式を u の偏微分方程式に書き換え，それに対し後述の粘性解法を適用し，一意的な時間大域解を得ようというものである．

関数 u の各等高面 $\Gamma_t^\gamma=\{x\in\mathbb{R}^n\mid u(x,t)=\gamma\}$ が平均曲率流にしたがって動くときの u がみたすべき方程式を書き下そう．u は滑らかとし，考えている領域では $|Du|\neq 0$ とすると Γ_t^γ は滑らかな超曲面であり，その法線ベクトルは $\boldsymbol{N}=Du/|Du|$ とかけるので，その平均曲率 κ は

$$\kappa=-\mathrm{div}(\boldsymbol{N})=-\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) \tag{5.19}$$

となる．一方，Γ_t^γ の $\boldsymbol{N}$ 方向の速度は

$$V=-\frac{u_t}{|Du|}\boldsymbol{N} \tag{5.20}$$

であるから，平均曲率流方程式は $-u_t/|Du|=-\mathrm{div}(Du/|Du|)$ となり，結局 Γ_t^γ に沿って

$$u_t=|Du|\,\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) \tag{5.21}$$

を得る．右辺の div を計算すれば

$$u_t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^2}\right)u_{x_ix_j} \tag{5.22}$$

となる．ここで右辺の δ_{ij} は Kronecker のデルタであり添字 x_i は微分を表す．

注意 5.4 等速成長の場合(注意 5.1 参照)，等高面方程式は $u_t = c|Du|$ となる．

(5.22)の右辺は次の関数を用いると簡潔にかける．

$$F(\boldsymbol{p}, X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{p_ip_j}{|p|^2}\right)X_{ij} \tag{5.23}$$

ここで $\boldsymbol{p}$ は n 次元ベクトル，X は $n\times n$ 実対称行列である．これにより

$$u_t = F(Du, D^2u) \tag{5.24}$$

とかける．D^2u は u の Hesse 行列 $(u_{x_ix_j})_{1\leqq i,j\leqq n}$ である．F は，さらに次のように書くことができる．

$$F(\boldsymbol{p}, X) = \mathrm{trace}[(I - \overline{\boldsymbol{p}}\otimes\overline{\boldsymbol{p}})X], \quad \overline{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{5.25}$$

I は単位行列であり，テンソル積 $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}$ は ij 成分が p_iq_j である $n\times n$ 行列を表す．この F は直接計算により $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ に対して，次の 2 つの性質をみたすことが直ちに確かめられる．

(i) $F(s\boldsymbol{p}, sX) = sF(\boldsymbol{p}, X), \quad s>0$

(ii) $F(\boldsymbol{p}, X + r\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{p}, X), \quad r\in\mathbb{R}$

これらをみたす F は陳–儀我–後藤[53] により**幾何学的**とよばれている．

さらに F は次の**単調性**もみたす．

$$F(\boldsymbol{p}, X) \leqq F(\boldsymbol{p}, X+Y), \quad Y \geqq 0 \tag{5.26}$$

ここで $Y\geqq 0$ は非負値実対称行列を意味する．これはすでに(5.16)で現れたことに注意しよう．

F が単調性をみたすとき，F を**(退化)楕円型**とよび，方程式 $u_t = F$ を**(退化)放物型**方程式とよぶ．しかし，すべての $Y\geqq 0$ について狭義単調性はみたされない．実際それは幾何学的という定義の(ii)および $r\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}$ は正値であることに注意すればよい．一方，熱方程式 $u_t = \Delta u$ の場合には $F(\boldsymbol{p}, X) =$

trace X であり，狭義単調性が成り立つ．F が幾何学的な場合には $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}$ 方向には退化しており，その方向には拡散が効かない．上で "退化" 楕円型とよぶのは，この理由による．

注意 5.5　$F(\boldsymbol{p},X)$ が X によらないとき(例えば等速成長方程式)，$u_t=F$ は1階の微分方程式となるが，これは退化放物型となる(すべての方向に退化している)．

(b) 粘性解

滑らかな初期値から出発しても有限時間で特異点が出現する例として，上の注意 5.5 で述べた1階方程式の特別な場合である空間1次元非線形双曲線方程式 $u_t+(u^2/2)_x=0$ における解 u の不連続点「ショック」がある．これは Hamilton–Jacobi 方程式

$$u_t+H(u_x)=0 \tag{5.27}$$

を x について微分し，$v=u_x$ とおいて得られる非線形保存則の特別な場合となっている．$H(u_x)$ が u_x について凸であるときは，Hopf–Lax の公式によりその一般化された弱い解の特徴づけがなされている(例えば[89]の第3章参照)．

そこにおける弱い解は超関数の意味での解であり，発散型の偏微分方程式に対しては部分積分法により試料関数に微分をうまく "転嫁" して，弱解の定義を得ることができた．しかし，ここで問題としている平均曲率流から決まる退化放物型方程式は発散型ではなく，この方法はなじまない．

それに代わって出てきたのが粘性解とよばれるものである．その名が示すように，1階の Hamilton–Jacobi 方程式に2階の粘性項を付けた正則化方程式の解の極限でもって，弱解の定義とする粘性消滅法([109],[89]参照)とも密接に関連しているが，はるかにそれよりは一般的なものである．

粘性解法が平均曲率流などの界面方程式に有効であることを最初に示したのは，[53], [90]らによる．とくに[53]ではより広く前述の幾何学的な非線形性 F に対しても以下の結果が示されたが，ここでは後の理解に必要な最小限の内容に限定する．詳しくは[63],[12],[109]およびそこにおける文献を参

照されたい．基本的手順は次のようなものである．

あるコンパクトな超曲面 $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，等高面が Γ_0 に一致するような有界・連続関数 g をみつける．すなわち $\Gamma_0 = \{x \mid g(x)=0\}$ とする．粘性解の手法により初期値問題

$$(5.28)\qquad \begin{cases} u_t = \left(\delta_{ij} - \dfrac{u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^2}\right)u_{x_ix_j}, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

を解き，そして

$$(5.29)\qquad \Gamma_t = \{x \mid u(x,t)=0\} \quad (t \geqq 0)$$

でもって Γ_0 から出発する平均曲率流とするのである．$\{\Gamma_t\}_{t\geqq 0}$ が**一般化された平均曲率流**とよばれるためには，(5.28)が特異点を発生しても時間大域的に解けるだけでなく，一意で，かつ古典解が存在するならばそれに一致していなければならない．粘性解はこれらの要請をみたす弱い解となっているのである．

定義 5.6（**粘性解**）　有界・連続な関数 u が(5.28)の**粘性劣解**（**優解**）であるとは，$\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$ で $u=g$ であり，任意の $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ に対して，もし $u-\phi$ が極大値（極小値）を $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ でもつならば

$$(5.30)\qquad \phi_t \leqq (\geqq) \left(\delta_{ij} - \frac{\phi_{x_i}\phi_{x_j}}{|D\phi|^2}\right)\phi_{x_ix_j} \quad (D\phi(x_0,t_0) \neq 0 \text{ のとき})$$

または

$$(5.31)\qquad \phi_t \leqq (\geqq)\,(\delta_{ij} - \eta_i\eta_j)\phi_{x_ix_j} \quad (D\phi(x_0,t_0) = 0 \text{ のとき})$$

がそれぞれ (x_0,t_0) で成り立つときをいう．粘性劣解でありかつ優解であるとき u は**粘性解**とよばれる．　□

定理 5.7（**粘性解の存在と一意性**）　(5.28)の粘性解は時間大域的に存在し，かつ一意である．

［証明］　[53], [90], [109]を参照．　∎

上の定理 5.7 により，(5.28)の解の一意存在が保証されたが，等高面 Γ_0 を与える関数 g は無限とおりの選び方がある．したがって別の $\Gamma_0 = \{x \mid \hat{g}(x) = 0\}$ をみたす $\hat{g}$ を採用して構成した $\hat{u}(x,t)$ が同じ平均曲率流を与えるかどう

かは自明でない．実は，次の命題より別の $\hat{g}$ を用いても大丈夫であることが示せる．

命題 5.8　u を(5.28)の一意的な粘性解とする．$\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数とするとき

$$\tilde{u} = \Phi(u) \tag{5.32}$$

は $\tilde{g}=\Phi(g)$ を初期値とする一意粘性解となる．□

また古典解との両立性も知られている．

定理 5.9　Γ_0 が滑らかな $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた超曲面とする．粘性解法によって構成された一般化平均曲率流 $\{\Gamma_t\}_{t\geqq 0}$ は Γ_0 から出発した(一意的な)古典解の平均曲率流に(それが存在する範囲で)一致する．□

(c)　双安定反応拡散方程式の平均曲率流への収束

第4章において反応拡散系と速度・曲率方程式との関連を形式的接合漸近展開を用いて調べた．もし制御変数 v が2重井戸型ポテンシャルの2つの底のエネルギーが等しくなるように固定されているならば，そのときの界面ダイナミクスは平均曲率流となる．

一般に，これらの関係を明らかにすることは重要である．それは単に反応拡散系と界面方程式の対応がつくのみならず，例えば phase field モデルが結晶成長を記述するのになぜ有効であるかが明らかになるからである(次節参照)．その意味で，現象の数理モデルを作る際にもこれらの結果は指針となるものである．

この節では最も基本的な結果である次の単独双安定型の反応拡散方程式(Allen–Cahn 方程式)の界面方程式への収束を厳密に示す．

$$u_t = \Delta u - W'(u), \quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \tag{5.33}$$

ここで $W(u)$ はこれまでのように2重井戸型ポテンシャルである．$W'(u)$ のもつ双安定性より十分時間がたてばフロントが形成され，その法線速度 V は

$$V = \alpha+\kappa t^{-1}+O(t^{-2}), \quad t\gg 1 \tag{5.34}$$

のように振る舞うことが形式的に導かれる．ここで κ は平均曲率であり，α は $W(u)$ からきまるある定数である．定数 α はポテンシャルの2つの極小点

でのエネルギーレベルの差からくる駆動力であり，第2項は拡散項からくる界面張力である(これらは第4章で取り扱った速度・曲率方程式においてすでに現れていた)．これら2つの運動様式を特徴づけるには**異なる時空スケール**を用いなければならない．実際，漸近展開(5.34)の第1項の一定速度αで進む運動を特徴づけるには双曲型スケーリング$(x,t)\mapsto(\epsilon^{-1}x,\epsilon^{-1}t)$がふさわしい．

$$u^\epsilon(x,t)=u(\epsilon^{-1}x,\epsilon^{-1}t) \tag{5.35}$$

とかき直すとu^ϵのみたすべき方程式は

$$u_t^\epsilon=\epsilon\Delta u^\epsilon-\epsilon^{-1}W'(u^\epsilon) \tag{5.36}$$

となり，この$\epsilon\to 0$での特異極限を考えるのが必要となる．もし$\alpha=0$(ポテンシャルの2つの極小値での値が等しい)ならば，放物型スケーリング$(x,t)\mapsto(\epsilon^{-1}x,\epsilon^{-2}t)$によって第2項を特徴づけることが可能となる．このときは

$$u^\epsilon(x,t)=u(\epsilon^{-1}x,\epsilon^{-2}t) \tag{5.37}$$

は

$$u_t^\epsilon=\Delta u^\epsilon-\epsilon^{-2}W'(u^\epsilon) \tag{5.38}$$

をみたし，この特異極限が問題となる．

これらを厳密に示すために準備として2重井戸型ポテンシャルWの性質を復習しておこう(命題4.32参照)．$W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を$\pm1$で極小値をもち，ある$\mu\in(-1,1)$で極大値をもつ(それ以外の停留値はないとする)，2重井戸型ポテンシャルとするとき，一意的な$c\in\mathbb{R}$と$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が存在し

$$\begin{cases} c\dot q+\ddot q=W'(q) & \mathbb{R}\text{上} \\ q(\pm\infty)=\pm1, \quad q(\mu)=0, \quad \dot q>0 & \mathbb{R}\text{上} \end{cases} \tag{5.39}$$

をみたす，さらに

$$c=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dot q^2(\xi)d\xi\right)^{-1}(W(1)-W(-1)) \tag{5.40}$$

が成り立つ．ここでは初期値として次の形を仮定する．

$$u_0(x)=q(\epsilon^{-1}d_0), \quad \mathbb{R}^n\times\{0\} \tag{5.41}$$

ここでd_0は初期界面Γ_0からの符号付き距離関数である．実は，この仮定は

[51]の結果を用いれば弱められることがわかっている．このとき次の結果が成り立つ．

定理 5.10（**双曲型スケーリング**）　W は(5.39), (5.40)をみたすとし，u^ϵ を $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上の関数 u^0 を初期値とする(5.35)の解とする．$\Omega_0 = \{x \mid u_0(x) > 0\}$，$\Gamma_0 = \{x \mid u_0(x) = 0\}$ と定義するとき，$\Gamma_0 = \partial\Omega_0 = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0)$ が成り立つと仮定する．いま $(\Gamma_t, \Omega_t^+, \Omega_t^-)$ を $(\Gamma_0, \Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0)$ を初期値とする速さ α の等速成長による等高面の発展とする．このとき $\epsilon \to 0$ で

$$
(5.42)\qquad u^\epsilon \to \begin{cases} 1 & \theta = \bigcup_{t>0} (\Omega_t^+ \times \{t\}) \text{ において} \\ -1 & \theta' = \bigcup_{t>0} (\Omega_t^- \times \{t\}) \text{ において} \end{cases}
$$

が局所一様に成り立つ．　□

定理 5.11（**放物型スケーリング**）　W がさらに $W(-1) = W(+1) = 0$ をみたすとする．u^ϵ は $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上の関数 u_0 を初期値とする(5.37)の解とする．Ω_0, Γ_0 は前定理と同様とし，$\Gamma_0 = \partial\Omega_0 = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0)$ も成り立つと仮定する．もし $(\Gamma_t, \Omega_t^+, \Omega_t^-)$ を $(\Gamma_0, \Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0)$ から出発する平均曲率流による等高面の運動とすると，$\epsilon \to 0$ のとき

$$
(5.43)\qquad u^\epsilon \to \begin{cases} 1 & \theta = \bigcup_{t>0} (\Omega_t^+ \times \{t\}) \text{ において} \\ -1 & \theta' = \bigcup_{t>0} (\Omega_t^- \times \{t\}) \text{ において} \end{cases}
$$

が局所一様に成り立つ．　□

以下では定理 5.11 の証明の概要を述べる．定理 5.10 については例えば[92]および[13]を参照されたい．

[証明]　上下から優解と劣解ではさみ込んで u^ϵ の挙動を制御するために，ポテンシャル $W'(u)$ を微小変更した $W'(u) - \epsilon a$ を考える．ここで ϵ, a は十分小さくとり $W'(u) - \epsilon a = 0$ がちょうど 3 つの異なる零点 $h_-^{a,\epsilon} < h_0^{a,\epsilon} < h_+^{a,\epsilon}$ をもち，それらは $\epsilon \to 0$ のとき，それぞれ $-1, 0, 1$ へ収束する．このとき(5.39), (5.40)と同様に，次の 1 次元進行波解の方程式の一意的な解 $(c(a,\epsilon), q^{a,\epsilon})$ も存在するとする．

$$(5.44)\qquad \begin{cases} \ddot{q}^{a,\epsilon}+c(a,\epsilon)\dot{q}^{a,\epsilon}=W'(q^{a,\epsilon})-\epsilon a & \mathbb{R}\text{上} \\ q^{a,\epsilon}(\pm\infty)=h^{a,\epsilon}_{\pm},\quad q^{a,\epsilon}(0)=h^{a,\epsilon}_0,\quad \dot{q}^{a,\epsilon}>0 \end{cases}$$

W は ±1 で同じ深さをもつポテンシャルであったので，

$$(5.45)\qquad c(a,\epsilon)\to 0,\quad \epsilon^{-1}c(a,\epsilon)\to c(a)\quad (\epsilon\to 0\text{のとき})$$

$$(5.46)\qquad c(a)\to 0\quad (a\to 0\text{のとき})$$

がみたされるとしてよい．これはポテンシャルが ϵ の1次の摂動を受けたとき，進行波解の速度も同じオーダーの変化を受けることを示している．さて以下では(5.37)の解 u^ϵ の優解を構成することを考える．特異極限方程式の解を $u^{\delta,a}$ とおこう．

(5.47)

$$\begin{cases} u^{\delta,a}_t=\mathrm{trace}\left[\left(I-\dfrac{Du^{\delta,a}\otimes Du^{\delta,a}}{|Du^{\delta,a}|^2}\right)D^2u^{\delta,a}\right]-c(a)|Du^{\delta,a}|, & \mathbb{R}^N\times(0,\infty) \\ u^{\delta,a}=d_0+\delta, \quad \mathbb{R}^N\times\{0\} \end{cases}$$

ここで δ は初期における距離関数からのズレであり，$c(a)$ は上で定義したものである．$W(u)$ の摂動を ϵa とおいたので特異極限は ϵ に依存しない形でかけることに注意しよう．(5.47)の等高面は

$$(5.48)\qquad V=\text{平均曲率}-c(a)$$

で運動することがわかる．さらに $d^{\delta,a}$ を集合 $\{x\,|\,u^{\delta,a}(x,t)=0\}$ からの符号付き距離関数とすると

$$(5.49)\qquad \begin{cases} d^{\delta,a}_t\geqq \Delta d^{\delta,a}-c(a)|Dd^{\delta,a}| \\ \text{および}\quad |D\delta^{\delta,a}|=1 \qquad \{d^{\delta,a}>0\}\text{において} \end{cases}$$

が成り立つ((5.13)参照)．この距離関数 $d^{\delta,a}$ を用いて u^ϵ の優解を作るのであるが，そのためには次の補助関数 $w^{\delta,a}$ を導入するのが便利である．

$$(5.50)\qquad w^{\delta,a}=\eta_\delta(d^{\delta,a}),\quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty)$$

ここで $\eta_\delta\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は滑らかな関数であり，次の性質をみたす．

$$(5.51)\qquad \begin{cases} \eta_\delta(z) = -\delta & (z \leqq \delta/4) \\ \eta_\delta(z) = z-\delta & (z \geqq \delta/2) \\ \eta_\delta(z) \leqq -\delta/2 & (z \leqq \delta/2) \\ 0 \leqq \eta_\delta'(z) \leqq C \quad \text{および} \quad |\eta_\delta''| \leqq C\delta^{-1} & \mathbb{R}\text{上} \end{cases}$$

C は δ に依存しない定数である．

この$w^{\delta,a}$ に対し Φ^ϵ を

$$(5.52)\qquad \Phi^\epsilon = q^{a,\epsilon}(\epsilon^{-1}w^{\delta,a}), \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

と定義するとき次が成り立つ．

命題 5.12　すべての $a>0$ に対して，ある $\epsilon_0(\delta,a)$, $\delta_0(a)$ がとれて，$\epsilon \leqq \epsilon_0(\delta,a)$, $\delta \leqq \delta_0(a)$ ならば，Φ^ϵ は(5.38)の優解である．

［証明］　詳しい証明は[92]および[13]に譲る．以下では $w^{\delta,a}$ が滑らかであるとして，計算の方針のみ示す．実際は，それらがすべて粘性解の意味で成立することを確かめる必要がある．さて $\Phi^\epsilon_t - \Delta\Phi^\epsilon + (1/\epsilon^2)W'(\Phi^\epsilon)$ の符号を見なければならない．(5.44)および(5.52)より次を得る．

$$(5.53)\qquad \Phi^\epsilon_t - \Delta\Phi^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2}W'(\Phi^\epsilon) = \epsilon^{-1}\dot{q}^{a,\epsilon}(w^{\delta,a}_t - \Delta w^{\delta,a} + \epsilon^{-1}c(a,\epsilon)) - \epsilon^{-1}\ddot{q}^{a,\epsilon}(|Dw^{\delta,a}|^2 - 1) + \epsilon^{-1}a$$

ここで $\dot{q}^{a,\epsilon}$, $\ddot{q}^{a,\epsilon}$ はすべて $\epsilon^{-1}w^{\delta,a}$ での値をとる．右辺を評価するために次の補助定理が必要となる(証明は[92]を見よ)．

補題 5.13　δ, a に依存しない正定数 C がとれて，次が成り立つ．

(i)　$w^{\delta,a}_t - \Delta w^{\delta,a} + c(a)|Dw^{\delta,a}| \geqq -\delta^{-1}C \qquad \mathbb{R}^N \times (0,t^*)$ で

(ii)　$w^{\delta,a}_t - \Delta w^{\delta,a} + c(a)|Dw^{\delta,a}| \geqq 0 \qquad \{d^{\delta,a} > \delta/2\}$ で

(iii)　$|Dw^{\delta,a}| = 1 \qquad \{d^\delta > \delta/2\}$ において

ここで t^* は $\{x \mid u^{\delta,a}(x,t)=0\}$ の消滅時刻である．　□

さて $d^{\delta,a}$ の大きさに応じて2つの場合に分けよう．

(I)　$d^{\delta,a} > \dfrac{\delta}{2}$ のとき

補題5.13を用い，次に ϵ を十分小さくとれば次を得る．

$$(5.54)\quad \begin{aligned} \Phi^\epsilon_t - \Delta\Phi^\epsilon + \epsilon^{-2}W'(\Phi) &\geqq \epsilon^{-1}\dot{q}^{a,\epsilon}(\epsilon^{-1}c(a,\epsilon)-c(a)) + \epsilon^{-1}a \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

(II)　$d^{\delta,a} \leqq \dfrac{\delta}{2}$ のとき

η_δ の定義より

$$(5.55)\qquad w^{\delta,a} \leqq -\frac{\delta}{2}$$

となる．したがって進行波解 $q^{a,\epsilon}$ の遠方での指数減衰の評価を用いると，あるある $K>0$ が存在して

$$(5.56)\qquad \epsilon^{-1}\dot{q}^{a,\epsilon} + \epsilon^{-2}|\ddot{q}^{a,\epsilon}| \leqq Ke^{-K\delta/\epsilon}$$

が成り立つ．一方，η'_δ の有界性(5.51)および $|Dd^{\delta,a}|\leqq 1$ より $|Dw^{\delta,a}|\leqq C$ がわかる．補題 5.13 の(i)を合せて用いれば，ある $\widehat{C}>0$ がとれて

$$(5.57)\qquad \Phi^\epsilon_t - \Delta\Phi^\epsilon + \epsilon^{-2}W'(\Phi^\epsilon) \geqq Ke^{-K\delta/\epsilon}(-\delta^{-1}C - \hat{C}) + \epsilon^{-1}a$$

よって与えられた δ に応じて ϵ を十分小さくとれば右辺$\geqq 0$ となる．∎

さて以上の準備の下に定理 5.11 を証明することができる．

初期値の条件(5.41)，命題 5.12 および最大値原理を用いれば，与えられた δ, a に対し，十分小さく ϵ とれば，次が成り立つ．

$$(5.58)\qquad u^\epsilon \leqq \Phi^\epsilon, \quad \mathbb{R}^n\times[0,t_*)$$

一方，u を平均曲率流

$$(5.59)\qquad \begin{cases} u_t = \mathrm{trace}\left(I - \dfrac{Du\otimes Du}{|Du|^2}\right), & \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u = d_0, & \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

の解とし，$(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times[0,t_*)$ を $u(x_0,t_0)=-\beta<0$ となるような点とする．粘性解の安定性より $\delta,a\to 0$ のとき (x,t) で一様に $u^{\delta,a}\to u$ となる．したがって，δ, a を十分小さくとれば

$$(5.60)\qquad u^{\delta,a}(x_0,t_0) < -\frac{\beta}{2} < 0$$

とできる．これは $d^{\delta,a}(x_0,t_0)<0$ を意味する．したがって

$$(5.61)\qquad \limsup_{\epsilon\to 0} u^\epsilon(x_0,t_0) \leqq \limsup_{\epsilon\to 0}\Phi^\epsilon(x_0,t_0) = -1$$

となる．再び初期値の条件(5.41)と最大値原理を用いれば $u^\epsilon \geqq -1$ であるので，結局

$$(5.62)\qquad u^\epsilon \to -1 \qquad \bigcup_{0<t<t_*} \{x \mid u(x,t)<0\} \text{ において}$$

を得る．劣解を構成して $u(x,t)>0$ の領域での $+1$ への収束も同様に証明できる．また $\mathbb{R}^n\times(0,t_*)$ から全領域 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ への拡張については[92]および[13]を参照されたい．∎

§5.3　phase field モデルの特異極限

この節では凝固・融解過程を記述する phase field モデル

$$(5.63)\qquad \begin{cases} \partial_t u+\lambda\partial_t\phi = \Delta u \\ \alpha\epsilon^2\partial_t\phi = \epsilon^2\Delta\phi+f(\phi,u;\epsilon) \end{cases}$$

を例にとりながら(変数の意味は次の項(a)を見よ)，$\epsilon\to 0$ におけるさまざまな特異極限およびその相互関係を調べる．界面の時間発展を記述するには，界面を薄いが幅のあるものとして取り扱う場合——上のモデル方程式はその典型例——と，幅はなく，考えている変数がそこで何らかの不連続性をもつとし，その不連続面の運動を考える——第3章で現れた Stefan 型モデルがその一例——という2つの立場がある．

もとの現象を記述するにはどのモデルが最もふさわしいかという議論は，物理的観点からさまざまになされている．しかし特異極限という立場からはどのような時空スケールでその現象を見ているのかの違いであり，その意味ではそれぞれは各スケールにおいて最もふさわしいモデルと考えられ，また互いに無関係ではない．実際，phase field モデルからは特異極限のとり方に応じて，いくつかの異なる界面方程式が得られる([32],[35]参照)．

考えるべき問題は次の3つである．

(i)　スケーリングとそれに伴う特異極限方程式の決定

(ii)　特異極限方程式の適切さ

(iii) 特異極限方程式の諸性質

近年これらの問題に対し大幅な進歩があり，現在も進展中である．上の試みはさまざまなモデル方程式に対して特異極限という血縁関係による家系図作りとも見れる．その一端を以下では主として(i)に関して phase field モデルを中心に概説する．

(a) phase field モデル

phase field の phase ϕ は結晶成長の場合でいえば，系が固相にあるか液相にあるかを指示する秩序変数を意味しており，周期解の位相(phase)とは異なる．実際(5.63)では，ϕ が -1 付近では固相，1 付近では液相の状態にあることを示している．f に対しては次を仮定する．

$$(5.64)\qquad \begin{cases} \text{固定した } u \text{ に対し，双安定であり次をみたす.} \\ f(\phi,0,\epsilon) = -f(-\phi,0,\epsilon), \quad f(\pm 1,0,\epsilon) = 0 \\ \displaystyle\int_{h_-(u,\epsilon)}^{h_+(u,\epsilon)} f(\phi,u,\epsilon)d\phi \neq 0, \quad u \neq 0 \end{cases}$$

$\phi = h_\pm(u,\epsilon)$ は u を固定して，拡散項をとり去った ϕ の ODE の平衡点 $f=0$ の両端の 2 つの安定な枝を表している．以下においては，典型的な場合である $f(\phi,u) = k(\phi-\phi^3)+u$ を想定すれば十分である．奇関数対称性は簡単のためであり本質的ではない．

変数 u は温度場を表しており，ポテンシャル $W(\phi) = \int^\phi f(\phi,u,\epsilon)d\phi$ をかけばわかるように，$u>(<)0$ ならば液相(固相)に対応するポテンシャルの底が深くなる(図 5.2)．これが温度変化に伴う相変化の駆動力を与える．

λ は潜熱パラメータであり，相が時間的に変化すると $\lambda\phi_t$ の割合で熱量が出される．したがって，(5.63)の第 1 式は熱量保存を表している．より詳しくは[31]および[164]を参照されたい．また，潜熱パラメータ λ はここでは定数としているが，$\lambda = \lambda(\phi)$ と相依存するのが自然であり，かつ熱力学的観点からも理に適っている．それらについては[240]を参照されたい．

結晶成長の古典的モデルとしては，第 3 章で述べたように Stefan 型モデルがよく知られており，その物理的意味もわかりやすい．一方，phase field

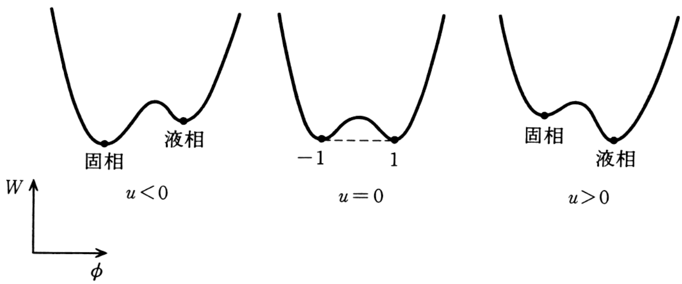


図 5.2 phase field モデルにおける 2 重井戸型ポテンシャルの温度依存性

モデルは秩序変数 ϕ を導入し，より現象論的に導入されたモデルであったため，当初その位置付けがはっきりしなかった．しかし，この節で明らかとなるように適切な特異極限をとれば，それはさまざまな Stefan 型モデルに帰着することがわかる．

したがって，これらのモデルは異なるものを見ていたわけではなく，一方は界面の厚さが $O(\epsilon)$ で存在すると考え，他方 Stefan 型は厚さが 0 のシャープな界面とみなして現象を解釈していたことになる．このことは方程式間の数学的な関係を明らかにすると同時に新しい現象のモデリングの際の重要な指針をも与えるものである．

(b) phase field モデルの特異極限

さて phase field モデルは潜熱パラメータ λ をはじめ，界面の厚さに対応する ϵ，時定数の違いを表す緩和パラメータ α など多くのパラメータを含んでおり，どのような組合せで特異極限をとればよいかは前もって明らかではない．しかし界面の厚さ $O(\epsilon)$ はいずれにせよ 0 となるので，§4.3(c)で論じた接合漸近展開法を(5.63)に対して適用し，極限系の形の候補を導出したあとで，議論するのがわかりやすい．

界面 Γ は液相 $\mathcal{D}_+$ $(r>0)$ と固相 $\mathcal{D}_-$ $(r<0)$ の境界面であり，§4.3(c)におけると同様に大文字 U, Φ は内部変数を，小文字 u, ϕ は外部変数を表す．また簡単のため，空間は 2 次元とし f は ϵ に依存しない場合を考える．引き延

ばし座標 $\rho=\dfrac{r}{\epsilon}$ などの記号は前と同様とする．また界面 $\Gamma(r=0)$ の位置は $\Phi=0$ の等高線で定義する．以下の導出は[35]に負う．

(u,ϕ) を ϵ-展開して(5.63) へ代入すると直ちに次を得る．

外部展開

$$\begin{cases} \partial_t u_0+\lambda\partial_t\phi_0=\Delta u_0 \quad (r\neq 0) \\ f(\phi_0,u_0)=0 \end{cases} \qquad O(1) \tag{5.65}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_1+\lambda\partial_t\phi_1=\Delta u_1 \\ f_\phi(\phi_0,u_0)\phi_1+f_u(\phi_0,u_0)u_1=0 \end{cases} \qquad O(\epsilon) \tag{5.66}$$

(5.65)の第2式は $+1$ の近傍で $\phi_0=h_+(u_0)$ と解くことができて，さらにそこで $f_\phi(\phi_0,u_0)<0$ を仮定する(これは $O(\epsilon)$ での可解性に関わり，とくに f が上で述べた3次関数の場合はみたされている)．これを第1式へ代入すれば液相側 $(r>0)$ で成り立つべき

$$\partial_t(u_0+\lambda h_+(u_0))=\Delta u_0 \tag{5.67}$$

で u_0 のみの(非線形)熱方程式が得られる．同様に，固相側でも $\phi_0=h_-(u_0)$ と解けて $(r<0)$ で有効な u_0 に対する微分方程式が得られる．

高次展開項 u_k についても同様に u_k のみの方程式を導出できる．これらを解くためには界面 $r=0$ での条件(および初期・境界条件)が必要となる．そのためには次の内部展開が必要となる．

内部展開　界面に沿った座標系 (ρ,s,t) を用いて(5.63)を書き直すと次を得る．

$$\begin{aligned} &\partial_{\rho\rho}U+\epsilon(-r_t\partial_\rho U-\lambda r_t\partial_\rho\Phi+\Delta r\partial_\rho U)-\epsilon^2(\partial_t U+\partial_s U s_t \\ &\qquad +\lambda\partial_t\Phi+\lambda\partial_s\Phi s_t-(\partial_{ss}U|\nabla s|^2+\partial_s U\Delta s))=0 \end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{ss}\Phi+f(\Phi,U)-\epsilon\alpha r_t\partial_\rho\Phi+\epsilon\partial_\rho\Phi\Delta r \\ &\qquad +\epsilon^2(\partial_{ss}\Phi|\nabla s|^2+\partial_s\Phi\Delta s-\alpha\partial_t\Phi-\alpha\partial_s\Phi s_t)=0 \end{aligned} \tag{5.69}$$

また，$O(1)$ 項は

$$\partial_{\rho\rho}U_0=0 \tag{5.70}$$

(5.71) $$\partial_{\rho\rho}\Phi_0+f(\Phi_0,U_0)=0$$

有界な解のみ考えているので(5.70)より U_0 は定数となるが，(5.71)は速度0の非定数の定常解を要求しているので命題4.32より $U_0\equiv 0$ となる．

接合条件(4.51)を用いると

(5.72) $$u_0\Big|_{\Gamma_\pm}(=U_0)=0$$

となり，Φ_0 は(1.61)をみれば

(5.73) $$\Phi_0=\Phi_0(\rho)=\psi(\rho)$$

とかける．再び接合条件を ϕ に適用すると

(5.74) $$\phi_0\Big|_{\Gamma_\pm}=\pm 1$$

となる．(5.68)の $O(\epsilon)$ 項は次で与えられる．

(5.75) $$\partial_{\rho\rho}U_1=r_{0t}\partial_{\rho\rho}U_0+\lambda\partial_t r_0\partial_\rho\Phi_0-\Delta r_0\partial_\rho U_0=\lambda r_{0t}\psi'(\rho)$$

最右辺は(5.72),(5.73)より出る．ρ について1回積分すると

(5.76) $$\partial_\rho U_1=\lambda r_{0t}\psi(\rho)+c_1(s,t)$$

となる．$c_1(s,t)$ は積分定数である．接合条件(4.52)を用いると $\rho\to\pm\infty$ において(5.76)は

(5.77) $$\partial_r u_0\Big|_{\Gamma_\pm}=\pm\lambda r_{0t}+c_1(s,t)$$

となる．Γ の法線速度を v とかくと(第4章では γ とかいた)，$-r_{0t}=v_0$ とかける．したがって，$[\partial_r u_0]_\Gamma=\partial_r u_0\Big|_{\Gamma_+}-\partial_r u_0\Big|_{\Gamma_-}$ とかくことにすれば，(5.77)より次が得られる．

(5.78) $$[\partial_r u_0]\Big|_{\Gamma}=-2\lambda v_0$$

これは最低次の Stefan 条件(温度勾配のジャンプが界面速度に比例する)を与えている．

以上より，適当な初期条件のもとで(5.67),(5.72),(5.78)は一意的な解 $u_0(x,t)$，$r_0(x,t)$，$\phi_0(x,t)$ を与える．これらを用いて(5.77)より $c_1(s,t)$ も決定される．(5.76)をもう一度 ρ について積分して

(5.79)
$$U_1(\rho,s,t) = -\lambda v_0 \Psi(\rho) + c_1(s,t)\rho + c_2(s,t)$$

を得る．ここで $\Psi(\rho) = \int_0^\rho \psi(z')dz'$ である．$\psi(\rho)$ が $\rho \to \pm\infty$ で ± 1 に指数的に漸近するので，(5.79)は

(5.80)
$$U_1(\rho,s,t) = \lambda v_0 \int_0^\rho (\operatorname{sgn} z' - \psi(z'))dz' - \lambda v_0|\rho| + c_1(s,t)\rho + c_2(s,t)$$

とかきかえられる．右辺の第 2,3 項は ρ の 1 次項であるので再び接合条件(4.52)を用いると

(5.81)
$$u_1\Big|_{\Gamma_\pm} = c_2(s,t) + \lambda v_0 \int_0^{\pm\infty} (\operatorname{sgn} z - \psi(z))dz$$

となる．以上より温度場 U_1 は ρ の 1 次関数として振る舞うことがわかった．しかし，その決定には u_1, c_2 を知る必要があり，そのためには次の Φ を調べる必要がある．(5.69)の $O(\epsilon)$ を取り出すと次を得る．

(5.82)
$$\partial_{\rho\rho}\Phi_1 + f_\phi(\Phi_0,U_0)\Phi_1 + f_u(\Phi_0,U_0)U_1 = -\alpha v_0\psi'(\rho) - \kappa_0\psi'(\rho)$$

さて，ここで $\mathcal{L} \equiv \partial_{\rho\rho} + f_\phi(\psi(\rho),0)$ と定義し，$L^2(\mathbb{R})$ での可解条件を適用しよう．以下の具体的な計算は $f = k(\phi-\phi^3)+u$ として行う．

(5.83)
$$\mathcal{L}\Phi_1 = -U_1 - \alpha v_0\psi'(\rho) - \kappa_0\psi'(\rho)$$

と書き直し，$\mathcal{L}$ は $\psi'(\rho)$ を単純な 0-固有値に対応する固有関数としてもつので，可解条件は

(5.84)
$$\int U_1\psi' d\rho + (\alpha v_0 + \kappa_0)\int (\psi')^2 d\rho = 0$$

となる．(5.79)を(5.84)へ代入すると $c_2(s,t)$ が次のように決まる．

(5.85)
$$c_2 = v_0\left[\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(z)\psi'(z)dz - \frac{1}{2}\alpha A\right] - \frac{1}{2}\kappa_0 A$$

ここで $A \equiv \int_{-\infty}^{\infty}(\psi')^2 dz$ である．したがって(5.81),(5.85)より $u_1\Big|_{\Gamma_\pm}$ が次のように与えられる．

(5.86)
$$u_1\Big|_{\Gamma_\pm} = v_0\left[\lambda B - \frac{1}{2}\alpha A\right] - \frac{1}{2}A\kappa_0$$

ここで $B=\int_0^\infty (1-\psi(z))^2 dz$ である.

さて以上により，外部展開 u, ϕ および内部展開 U, Φ での0次および1次，r（あるいは v）の0次までが決定されたことになる．むろん，この展開は高次まで続けることができる．得られた界面方程式を改めてかくと次のようになる.

$$(u+\lambda f^{-1}(u))_t = \Delta u + O(\epsilon^2), \quad x \notin \Gamma(t) \tag{5.87}$$

$$[u_r] = -2\lambda v + O(\epsilon^2), \quad x \in \Gamma(t) \tag{5.88}$$

$$u = \epsilon v\left[\lambda B - \frac{1}{2}\alpha A\right] - \frac{1}{2}\epsilon A\kappa + O(\epsilon^2), \quad x \in \Gamma(t) \tag{5.89}$$

ここで外部展開は $h_\pm(u)$ を $f^{-1}(u)$ とまとめてかいた.

(5.89)は動的な Gibbs–Thomson 関係を与えている．すなわち界面温度は界面の曲率や速度に依存し，これらは一般に界面の安定性に寄与する.

さてこれまでは時間 t，未知関数 u のリスケーリングについては考えなかった．いま新しい時間変数 t' および未知関数 $\overline{u}$ を次のように導入する.

$$t' = pt, \quad \overline{u} = \delta^{-1} u \tag{5.90}$$

p, δ は共に正のパラメータで $p \leqq 1$，$\delta \ll 1$ であり，$\overline{u} = O(1)$ とする．過冷却度が小さければ，すばやく温度場はほぼ均一になる．そのようなとき $u = \delta\overline{u}$ というリスケーリングは役に立つ．このリスケーリングにより方程式(5.87)〜(5.89)は $v = p\overline{v}$ に注意すれば，次のようにかきかえられる.

$$p(\overline{u} + \lambda\delta^{-1} f^{-1}(\delta\overline{u}))_{t'} = \Delta\overline{u} + O\left(\frac{\epsilon^2}{\delta}\right) \tag{5.91}$$

$$[\overline{u}_r] = -\frac{2\lambda p}{\delta}\overline{v} + O\left(\frac{\epsilon^2}{\delta}\right) \tag{5.92}$$

$$\overline{u} = \frac{\epsilon p}{\delta}\overline{v}\left[\lambda B - \frac{1}{2}\alpha A\right] - \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\delta}A\kappa + O\left(\frac{\epsilon^2}{\delta}\right) \tag{5.93}$$

δ が小さいとき，$f^{-1}(\delta\overline{u})$ は近似的に

$$f^{-1}(\delta\overline{u}) = \pm 1 + m\delta\overline{u} \tag{5.94}$$

とおきかえられる．ここで $m = (f'(\pm 1))^{-1}$ である．これを(5.91)へ代入すると ± 1 は微分されて消えるので

$$p(1+\lambda m)\overline{u}_{t'} = \Delta\overline{u}+O\left(\frac{\epsilon^2}{\delta}\right) \tag{5.95}$$

となる．以下では外部領域をこの形で見ていく．さて α, λ, p，および δ の大きさのオーダーによりさまざまな自由境界問題が形式的ではあるが得られることを示そう．

(I)　Stefan 型

(i)　熱的緩和は遅く($p=1$)，潜熱効果も小さく($\lambda=\epsilon\overline{\lambda}$)，したがって温度場の変動も $O(\epsilon)$ であり($\delta=\epsilon$)，時定数 $\alpha=O(1)$ とすると極限系として次が得られる．

$$\begin{cases} \overline{u}_t = \Delta\overline{u} \\ [\overline{u}_r] = -2\overline{\lambda}v \\ \overline{u} = -\dfrac{1}{2}A(\alpha v+\kappa) \end{cases} \tag{5.96}$$

変数 x が $\Gamma(t)$ の外か上にあるかは明らかなので省略した．

(ii)　(i)と同様であるが，時定数 $\alpha\to 0$ ($\epsilon\to 0$ のとき)のときは次を得る．

$$\begin{cases} \overline{u}_t = \Delta\overline{u} \\ [\overline{u}_r] = -2\overline{\lambda}v \\ \overline{u} = -\dfrac{1}{2}A\kappa \end{cases} \tag{5.97}$$

(iii)　上2つでは $\dfrac{\lambda}{\delta}$，$\dfrac{\epsilon}{\delta}$ が共に $O(1)$ であって，したがって，潜熱効果($2\overline{\lambda}v$)および界面張力効果 $\left(\dfrac{1}{2}A\kappa\right)$ が極限として共に残った．いま $\lambda=O(\delta)$，$0<\epsilon\ll\delta\ll 1$ ならば $\epsilon/\delta\to 0$ となるので，$\lambda=\delta\overline{\lambda}$ として(5.91)～(5.93) は熱的緩和が遅い場合($p=1$，$\alpha\to 0$ とする)次のようになる．

$$\begin{cases} \overline{u}_t = \Delta\overline{u} \\ [\overline{u}_r] = -2\overline{\lambda}v \\ \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{5.98}$$

これは古典的 Stefan 問題であり，界面の曲率の効果は消えている．

次に，熱的緩和が速い場合($p\to 0$，$\epsilon\to 0$ のとき)を考えよう．

(II)　Mullin–Sekerka 型

(i)　熱的緩和が速い場合($p\to 0$)で，とくに $p=\dfrac{\epsilon}{\lambda}$ かつ $\dfrac{\epsilon}{\lambda}\to 0$ であり，$\delta=\epsilon$，そして時定数 α は $\alpha\ll\dfrac{\lambda}{\epsilon}$ をみたす(したがって $\alpha p\to 0$)とすると

$$
\begin{cases}
\Delta\overline{u}=0\\
[\overline{u}_r]=-2\overline{v}\\
\quad\overline{u}=-\dfrac{1}{2}A\kappa
\end{cases}
\tag{5.99}
$$

となる．

(ii)　p, δ および $\dfrac{\epsilon}{\lambda}$ は(i)と同様であるが，$\alpha=O\left(\dfrac{\lambda}{\epsilon}\right)$ ならば $\alpha=\dfrac{\lambda}{\epsilon}\overline{\alpha}$ とおいて

$$
\begin{cases}
\Delta\overline{u}=0\\
[\overline{u}_r]=-2\overline{v}\\
\quad\overline{u}=-\dfrac{1}{2}A(\overline{\alpha}\ \overline{v}+\kappa)
\end{cases}
\tag{5.100}
$$

を得る．

上のリスケーリングはなぜそのようにとるのか天下り的でわかりにくいが，実は次のように考えればよい．(ii)の場合を例にとろう．熱的緩和が速いならば(5.91)は極限で Laplace 方程式に帰着するのが自然であろう．したがって p および $p\lambda$ は共に0へ行くと考えられる．(5.93)で表面張力効果 κ が残るためには $\delta=\epsilon$ ととることになる．そのとき(5.93)の $\overline{v}$ の係数は p となり，この $\overline{v}$ の項が残るかどうかは αp の振舞いによる．

$p\lambda$ はすでに0へ行くとしたが，これが $p\lambda=\epsilon$ であるとすれば $\alpha p=\alpha\dfrac{\epsilon}{\lambda}$ となり，(ii)の場合はこれが有限で残るので(5.100)が得られる．逆に言えば，(5.91)〜(5.93)を見てどのような物理的効果をもつ界面方程式を得たいのか決めれば，それに合うリスケーリングを作ればよいのである．以上より phase field モデルはさまざまな界面方程式をその特異極限として内包してい

ることがわかった.

さて上述の分類表を数学的に正当化する作業は現在でも活発に行われており，ここでは途中経過を簡単に紹介するにとどめる．これにはいくつかの段階がある.

（1） 定常解，進行波解，球対称性などの仮定の下での収束性.

（2） 一般的状況での極限界面方程式の古典解および弱解の存在.

（3） phase field モデルの解の(2)で得られた解への収束.

一般に Mullin–Sekerka 問題をはじめ上で得られた界面方程式を解くのは(古典解，弱解を問わず)容易ではなく，ごく最近になってようやく結果が得られるようになった．その理由の1つは最大値原理が使えないからである.

(1)は，極限問題の古典解がたやすくわかる場合で[31],[36],[33]などの結果がある．(2)では，(I)の Stefan 型の弱解の大域存在に関して，それぞれ(i)については[266](局所解については[49])を参照，(ii)については[191]などを参照されたい．また(II)の Mullin–Sekerka 型では，特異点の存在も許容する弱解の大域存在はまだわかっていないが，古典解の存在については最近[48],[83],[84]らにより進展が得られた．(3)については，一般的状況での phase field モデルの Stefan 型(i)への収束証明は[266]があるが，まだ多くは今後の課題として残っている.

(c) Cahn–Hilliard 方程式の特異極限

温度一定での相分離を記述する方程式としては，第4章で紹介した次の Cahn–Hilliard 方程式がある.

$$u_t+\Delta\left\{\epsilon\Delta u-\frac{1}{\epsilon}W'(u^\epsilon)\right\}=0 \tag{5.101}$$

この方程式の $\epsilon\to 0$ での極限は，実は前節(b)で述べた Mullin–Sekerka 型(i)の自由境界問題(5.99)に収束する．(5.101)が体積保存することに対応して，(5.99)も Γ_t をその自由境界面とするとき，それで囲まれる体積は次の式で示されるように保存される.

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(t)=\int_{\Gamma_t}\overline{v}d\sigma=-\int_{\Omega}\Delta\overline{u}dx=0 \tag{5.102}$$

一方，表面積は次式のように減少することに注意しよう($\Gamma_t\subset\mathbb{R}^n$ とした).

$$\frac{1}{n-1}\frac{d}{dt}\mathrm{area}(t)=-\int_{\Gamma_t}\kappa\overline{v}d\sigma=-\frac{2}{A}\int_{\Omega}|\nabla\overline{u}|^2dx\leqq 0 \tag{5.103}$$

この収束は形式的にはすでに[237]によって示されていたが，次の厳密な結果が[2]により示された.

定理 5.14　Ω は滑らかな領域であり，Γ_{00} はその中に含まれる滑らかな超曲面とする．いま，Γ_{00} から出発する Mullin–Sekerka 問題(5.99)の滑らかな解 (v,Γ) が $[0,T]$ で存在するとし(記号を u から v へ変えたことに注意)，$\overline{\Gamma}_t\subset\Omega\,(t\in[0,T])$ であるとする．このとき $\epsilon\in(0,1]$，$(x,t)\in\overline{\Omega}_T$ ($\Omega_T=\Omega\times(0,T)$) で一様有界な関数 $u_0^\epsilon(x)\in C^\infty(\Omega)$，$J^\epsilon\in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ が存在し，u^ϵ が Cahn–Hilliard 方程式

$$u_t^\epsilon+\Delta\left\{\epsilon\Delta u^\epsilon-\frac{1}{\epsilon}W'(u^\epsilon)\right\}=0,\qquad (x,t)\in\Omega_T \tag{5.104}$$

$$u^\epsilon(x,0)=u_0^\epsilon(x),\qquad x\in\Omega \tag{5.105}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{\epsilon\Delta u^\epsilon-\frac{1}{\epsilon}W'(u^\epsilon)\right\}=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega_T \tag{5.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u^\epsilon(x,t)=\epsilon^4J^\epsilon(x,t),\qquad (x,t)\in\partial\Omega_T \tag{5.107}$$

をみたすとする．このとき

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}u^\epsilon(x,t)=\begin{cases}-1, & (x,t)\in Q_0^-\\ 1, & (x,t)\in Q_0^+\end{cases}\\ &\lim_{\epsilon\to 0}\left(\epsilon\Delta u^\epsilon-\frac{1}{\epsilon}W'(u^\epsilon)\right)(x,t)=v(x,t),\qquad (x,t)\in\Omega_T\end{aligned} \tag{5.108}$$

ここで Q_0^+ および Q_0^- はそれぞれ Ω_T における Mullin–Sekerka 問題(5.99)からきまる自由境界 Γ の外側および内側の領域である．さらにもし $W'(u)$ が $u=\pm 1$ の近くで線形関数ならば $J^\epsilon\equiv 0$ とできる.　□

上では Mullin–Sekerka 問題の古典解の存在を仮定している．しかし前節(b)で述べたように[48], [83]により，その存在は示されたので，この仮定は

取り除ける.

上の定理の証明は Cahn–Hilliard 方程式の線形化作用素のスペクトルの情報をもとに近似解を構成することにより得られるが詳細は述べない. 直観的に Mullin–Sekerka 問題が特異極限となることを見るには, $u \equiv -\epsilon\Delta\phi + \frac{1}{\epsilon}W'(\phi)$ とおき(5.101)を

$$
(5.109) \qquad \begin{cases} \phi_t = \Delta u \\ 0 = \epsilon\Delta\phi - \dfrac{1}{\epsilon}W'(\phi) + u \end{cases}
$$

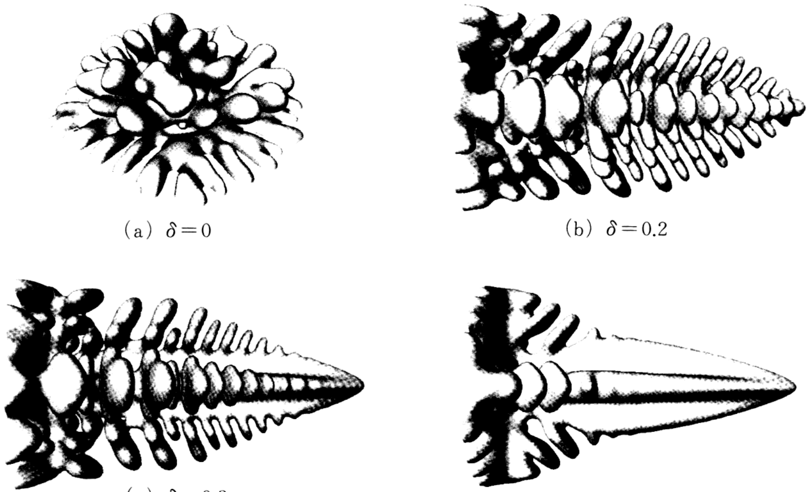
と書き直す. これは phase field モデル(5.63)において $\alpha=0$, $\lambda=1$ そして熱的緩和の速い(したがって温度場 u は界面以外では定数となる)という特別な場合となっている. u はしばしば化学ポテンシャルとよばれる. 実際極限では u の法線微分の界面でのジャンプがその駆動力となるので自然であろう.

特異極限では ϕ は界面では不連続となり, それ以外では $+1$ または -1 となる. よって(5.109)の第1式を弱形式と思えば(5.99)の第1式と第2式がでてくる. (5.109)の第2式からは(5.99)の第3式の Gibbs–Thomson 条件が出てくるが, それは前述の phase field モデルの場合とまったく同様にできる.

(d) 樹枝状結晶と異方性

第3章で結晶成長パターンを考える上で界面張力および異方性の重要性を述べた. (b)で述べた phase field モデル(異方性なし)はその特異極限を調べることにより界面張力をはじめいくつかの重要な物理的効果を内包していることがわかった. しかし phase field モデルは真に現実的なモデルであろうか. たとえば樹枝状結晶を再現できるであろうか. 実は**異方性**を考察すれば, phase field モデルはそのようなパターンを再現できることが小林[164], [165]により数値的に確かめられている(図5.3参照).

異方性がない場合には先端分裂をおこしながら成長していくが, 図5.3(a)のように樹枝状形にはほど遠い. 具体的には異方性は係数 ϵ が界面の法線方向の速度ベクトル v に依存するとして $\epsilon=\epsilon(v)$ の形で導入することができる.



(a) $\delta=0$ (b) $\delta=0.2$ (c) $\delta=0.3$ (d) $\delta=0.5$

図 5.3 異方性の強さと樹枝状結晶

しかし，小林[165]においては(計算時間を考慮して)，双安定性の温度依存のところに異方性を次のように導入している．

$$(5.110)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + \phi_t \\ \tau\phi_t = \epsilon^2\Delta\phi + \phi(1-\phi)\left(\phi - \dfrac{1}{2} + m(T, -\nabla\phi)\right) \end{cases}$$

ここで $\nabla\phi$ は実質的に界面のところでのみ効き(それ以外ではほとんど 0)，$v=-\nabla\phi$ と考えてよい．例えば 4-モード異方性のときは

$$(5.111)\qquad \begin{cases} m(T,v) = -c\tan^{-1}(\gamma\sigma(v)T) \\ \sigma(\theta) = 1 - \dfrac{1}{4}\delta(1-\cos 4\theta) \end{cases}$$

で与えられる．c, γ, δ は正定数であり，とくに δ は異方性の強さをコントロールしている．図 5.3(c)のように δ を適当にとれば，先端は一定速度，一定形状で進み，実験で得られる樹枝状結晶に酷似している．

しかし，これらの数学的解析はほとんど何も手がついていない状態である．

それは第3章でも述べたが，シミュレーションレベルにおいても，なぜ先端から次々と横枝が成長するのか，そのメカニズムの詳細はよくわかっていないのである．実際，異方性の強さによっては図5.3(b)のように先端は一定速度で進んでいるのではなく振動しつつ伸びていく場合もある．さらに異方性が強ければ図5.3(d)のようにほとんど針状結晶となる．先端分裂やHopf分岐という離散スペクトルによる不安定性と伝播不安定性(横枝成長)という連続スペクトルによるそれとが，複合的な不安定性をおこしていることが樹枝状結晶問題の面白さでもあり，難しさでもある．

§5.4　特異極限固有値問題

特異極限をとることにより偏微分方程式による記述が界面の運動という幾何学的なものに帰着されることを見た．いわば界面という局限されたところにダイナミクスの情報が集約されるわけである．実際，平均曲率流は界面の局所的な幾何学量である曲率のみに依存して運動が決まった．

一方，現実の散逸系が示すパターン形成の多様な解とダイナミズムは驚くばかりであり，これまで述べてきたものはその一端にすぎない．そのような多様性が出てくる1つの理由は，界面速度が曲率などの局所的幾何学量に依存するのみならず，制御変数vが作る**非局所的な空間場**と相互作用するからである．phase field モデルの特異極限として得られたMullin–Sekerka型モデル，Stefan型モデルもすべてその例となっている．

本節では最も単純な形で，この相互作用が理解できる空間1次元の活性・抑制型モデルについて議論する．まず，特異極限系について概観したのち，もとの反応拡散系の遷移層解の安定性や分岐について議論する．その際スペクトルの特異極限での振舞いは**SLEP**(singular limit eigenvalue problem)**法**により知ることができる．この節全般は[218]に基づく．詳しい証明についてもこれを参照されたい．

(a) 活性・抑制型反応拡散系の 1 次元特異極限系

§4.3(b)で述べた拡散不安定性がおこるためには $D_u < D_v$ が必要であった．したがって，その極端な場合として，$D_u = \epsilon^2 \ll 1$, $D_v = O(1)$ をとった次の 1 次元有限区間 $I = (0,1)$ 上の活性・抑制型モデルの特異摂動系が考えられる．

$$
(5.112)\qquad \begin{cases} u_t = \epsilon^2 u_{xx} + f(u,v) & (x,t) \in I \times (0,\infty) \\ v_t = D_v v_{xx} + g(u,v) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & (x,t) \in \partial I \times (0,\infty) \end{cases}
$$

これに対し，§4.3(c)の接合漸近展開法を適用すると，その特異極限系は遅い時間 $s = \epsilon t$ を用いて

$$
(5.113)\qquad \begin{cases} (\varphi_i)_s = (-1)^{i-1} c(V(\varphi_i(s))) \\ DV_{xx} + G_{\Phi_n(s)}(V) = 0 \end{cases}
$$

とかける．ここで，各 φ_i $(0 < \varphi_1(s) < \cdots < \varphi_n(s) < 1)$ は時刻 s での i 番目の遷移層の位置を表し，$\Phi_n(s) = (\varphi_1(s), \cdots, \varphi_n(s))$ とする．$c(\cdot)$ は速度・曲率方程式で現れた速度関数であり，そこでの V の値により決まる(命題 4.32 参照)．$G_{\Phi_n}(V)$ は $G_\pm(V) = g(h_\pm(V), V)$ のいずれかを表すが，ここでは第 1 小区間 $(0, \varphi_1(s))$ で $G_-(V)$ をとるとする．

以下，交互に φ_i で区切られた小区間(これらすべて s-依存する)で G_+ あるいは G_- の非線形性を採用する．V は $x = \varphi_i(s)$ では C^1 の意味で接合し，境界では Neumann 条件 $V_x = 0$ をみたすとする．U は $U = h_\pm(V)$ から自動的にきまることに注意しよう．模式的にこのダイナミクスの様子は図 5.4 のようになる．(5.112)のタイプの方程式およびその高次元版の時間大域存在については[126], [110], [111]等を参照されたい．

注意 5.15 初期値 $\Phi_n(0) = (\varphi_1(0), \cdots, \varphi_n(0))$ は任意にはとれない．厳密には，(5.113)の第 2 式をみたすような $\Phi_n(s)$ 上で(5.113)のダイナミクスは定義されている．

注意 5.16 一般に 2 つの遷移層 φ_i と φ_{i+1} が衝突し，それらではさまれてい

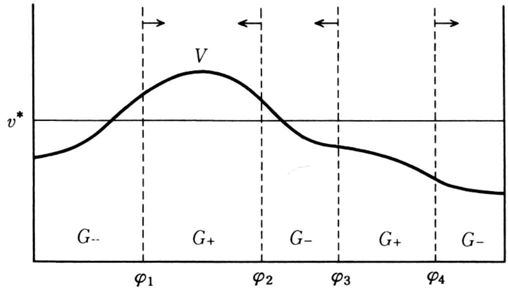


図 5.4　非局所場 V で駆動される界面

た**相が消滅する**ことがおこりうる．消滅点でも V は C^1 で接続されているので解は延長可能である．したがって(5.113)は一般に未知変数の数が時間と共に変化(減少)していく系である．解はそのような**粗視化過程**(coarsening)を経たのち，ある定常解に収束していくと予想されている．

命題 5.17（**n-遷移層の存在と一意性**）　ある自然数 N_0 が存在し，任意に遷移層の数 $n\,(\geqq N_0)$ が与えられたとき，(5.113)の定常解 Φ_n^* は存在し，かつ一意的である．　□

注意 5.18　$N_0=1$ とできるとは限らない．実際，$G_\pm(V)$ と区間の長さ $|I|$ によっては小さい n に対して定常解は存在しない．例えば $|G_\pm(V)|\geqq\delta>0$ であり，$|I|$ が大きければ V_{xx} が δ/D 以上で変化するので小さい n に対しては境界条件をみたせなくなる．一方，$G_\pm(V)$ がそれぞれ単調に減少して $G_+(\overline{V})=G_-(\underline{V})$ となる点が存在するならば $N_0=1$ とできる．

軌道が $s\to+\infty$ のとき，どの定常解に収束するかを論じるには Φ_n^* の安定性が重要になる．

命題 5.19（**Φ_n^*の局所安定性**）　すべての Φ_n^* は局所漸近安定である．　□

上の命題は最終状態は初期値に強く依存することを意味するが，裏返せばシステムがもつ最終状態の多様性を示している．各定常解の吸引領域が初期値空間をどのように分割しているかなどの大域的問題はこれからの課題とし

て残っている.

以下では，もとの反応拡散方程式系においても上に述べた結果が成り立つことを示そう.

(b)　反応拡散系における遷移層解

さて活性・抑制型反応拡散系(5.112)の1次元有限区間 $I=(0,1)$ 上における多重遷移層解を考えよう.

(f,g) としては§4.3(c)で述べたFitzHugh–Nagumo型のものが典型的であるが，一般的には次をみたすものであればよい.

(A.1)　等高線 $f(u,v)=0$ はS字型であり，u について解くとそれぞれ開区間 I_-，I_0，I_+ 上で定義された3つの滑らかな曲線 $u=h_-(v)$，$h_0(v)$，$h_+(v)$ となる．いま，$\inf I_-=\underline{v}$，$\sup I_+=\overline{v}$ とすると，不等式 $h_-(v)<h_0(v)<h_+(v)$ が $v\in I^*\equiv(\underline{v},\overline{v})$ で成り立つ(図5.5参照).

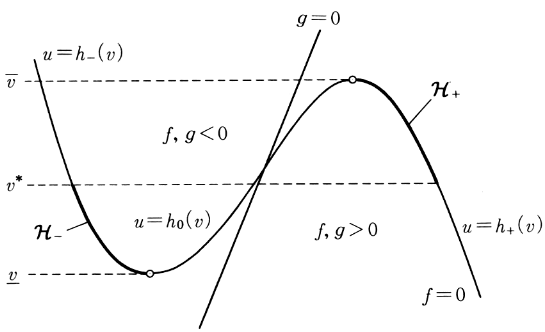


図5.5　非線形項 (f,g) の形状

(A.2)　等高線 $g(u,v)=0$ は $f=0$ と1点もしくは3点で横断的に交わる. $u=h_-(v)$ ($h_+(v)$ あるいは $h_0(v)$)上に平衡点が存在すれば，$P=(u_-,v_-)$ $=(h_-(v_-),v_-)$ ($Q=(u_+,v_+)=(h_+(v_+),v_+)$ あるいはまた $R=(u_0,v_0)=(h_0(v_0),v_0)$)とかく.

(A.3)　$J(v)$ は孤立した零点を $v=v^*$ ($\underline{v}<v^*<\overline{v}$) でもち，さらに $\dfrac{dJ}{dv}(v^*)$

<0 が成り立つ．ここで $J(v) \equiv \int_{h_-(v)}^{h_+(v)} f(s,v)ds$ である．

(A.4)

$$f_u < 0 \qquad \mathcal{H}_- \cup \mathcal{H}_+ \text{ 上}$$
$$\mathcal{H}_- \equiv \{(u,v) \mid u = h_-(v),\ v_- < v < v^*\}$$
$$\mathcal{H}_+ \equiv \{(u,v) \mid u = h_+(v),\ v^* < v < v_+\}$$

$\mathcal{H}_-$（あるいは $\mathcal{H}_+$）上に平衡点がなければ，v_-（あるいは v_+）は $\underline{v}$（あるいは $\overline{v}$）でおきかえる．

(A.5) $g|_{\mathcal{H}_-} < 0 < g|_{\mathcal{H}_+}$

(A.6) $\det\left(\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)\Big|_{\mathcal{H}_- \cup \mathcal{H}_+} > 0$

(A.7) $g_v|_{\mathcal{H}_- \cup \mathcal{H}_+} \leqq 0$

空間一様な(5.112)の平衡解 $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v})$ が $u = h_0(v)$ 上にあるとき，それがたとえ ODE の意味で安定であっても，活性化因子 u と抑制化因子 v の拡散の速さに一定以上の違いがあれば($D_u < D_v$)，Turing 不安定性により $\overline{U}$ は PDE の意味で不安定化し，その結果 $\overline{U}$ に代わって空間非一様な解 $\widetilde{U}$ が出現する(これは対称性破壊型分岐の好例となっている)．

分岐直後は $\widetilde{U}$ は $\overline{U}$ に近いが，パラメータが分岐点から離れると，それは大きく変化し，例えば $D_u = \epsilon^2 \ll 1$ となれば活性化因子 u は内部遷移層を有する大振幅解となる．

この分岐解から特異摂動解という，D_u に関する解の変形のプロセスは $D_v \to +\infty$ の極限の場合には厳密に示せる([217]参照)．しかし内部遷移層解が重要となるのは，その ODE ダイナミクスが Turing 型であるか興奮型であるかなどによらず普遍的に存在することである．実際，上述の (f,g) の仮定の中には $f=0$，$g=0$ の交わり方については何も触れていない．f のもたらす双安定性と遷移層の動きを制御する v の存在が重要となる．1 重遷移層解の存在は，2 つの異なる空間スケールの解を接合することによって得られる典型例となっている(§1.2 参照)．

さて次の定常問題を接合漸近展開法により解こう.

$$
(5.114)\qquad \begin{cases} \epsilon^2 u_{xx} + f(u,v) = 0 & \\ \dfrac{1}{\sigma} v_{xx} + g(u,v) = 0 & x \in I \\ u_x = v_x = 0 & x \in \partial I \end{cases}
$$

となる. ここで後の便宜上 $D_v = 1/\sigma$ とおいた. また $H_N^2(I)$ を $H^2(I)$ の部分空間で Neumann 境界条件をみたすものとする(cos 関数族の H^2 での閉包と同じ).

外部問題　形式的に(5.114)で $\epsilon = 0$ とおくと次を得る.

$$
(5.115)\qquad \begin{cases} f(u,v) = 0 & \\ \dfrac{1}{\sigma} v_{xx} + g(u,v) = 0 & (u,v) \in L^2(I) \times H_N^2(I) \end{cases}
$$

第1式は微分方程式ではなく, どの枝の解を採用するかは任意性が残る. ここでは v を固定したときに u が引き寄せられる2つの安定な枝, $u = h_{\pm}(v)$ をとり,

$$
(5.116)\qquad u = h^*(v) = \begin{cases} h_-(v) & v \leqq v^* \\ h_+(v) & v \geqq v^* \end{cases}
$$

を採用する. $v = v^*$ で切り替えるのは $v = v^*$ のときにのみ後述の内部問題の解の速度が0となるからである(われわれは定常解を求めている). 明らかに u は v が v^* を通るならば, そこで不連続関数となる. (5.116)を(5.115)の第2式へ代入して次を得る.

$$
(5.117)\qquad \frac{1}{\sigma} v_{xx} + G^*(v) = 0 \qquad v \in H_N^2(I)
$$

ここで $G^*(v) = g(h^*(v), v)$ であり, 図5.6のように区分的に単調減少関数となる.

注意 5.20　(5.117)の解は $v = v^*$ で C^1 の意味で接合されている.

補題 5.21　ある $\sigma_1^* > 0$ が存在し, $0 < \sigma < \sigma_1^*$ に対し(5.117)の単調増大な

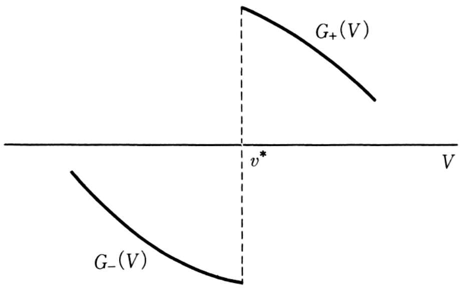


図 5.6 $G^*(V)$ のグラフ

解 $V^{*,\sigma}(x)$ が一意に存在する. □

注意 5.22 単調減少の解も同様に存在するが，それらは鏡映像なので単調増大のもののみ取り扱う.

(5.116) より $U^{*,\sigma}(x)=h^*(V^{*,\sigma})$ とすれば外部近似解として

$$(U^{*,\sigma}(x), V^{*,\sigma}(x)) \tag{5.118}$$

を得る. $V^{*,\sigma}$ の C^1-接合点(あるいは $U^{*,\sigma}$ の不連続点) $x=x_1^*(\sigma)$ は $V^{*,\sigma}(x_1^*)=v^*$ をみたす点として一意に決まる.

内部問題 $x=x_1^*(\sigma)$ で引き延ばし座標 $y=\dfrac{x-x_1^*(\sigma)}{\epsilon}$ を導入して，定常問題をかきかえて $\epsilon\to 0$ とすると次を得る.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{u}}{dy^2}+f(\tilde{u},v^*)=0 \\ \tilde{u}(\pm\infty)=h_\pm(v^*) \\ \tilde{u}(0)=h_0(v^*) \end{cases} \tag{5.119}$$

これはすでに何度も出会った方程式であり，$J(v^*)=0$ なので速度が 0 の定常解が一意に存在する. $\pm\infty$ での境界条件の値は外部近似解の $x=x_1^*$ での左右からの極限値に一致している. これらの近似解を組み合せ，一般化陰関数定理([94]参照)を用いると，次の定理を得る([204], [138]). 記号 $C_\epsilon^2(\bar{I})$ は次のノルムを入れた 2 階連続的微分可能な関数の全体である.

$$\|u\|_{C^2_\epsilon} = \sum_{k=0}^{2} \max_{x\in \bar{I}} \left| \left(\epsilon \frac{d}{dx}\right)^k u(x) \right|$$

定理 5.23（1-遷移層解の存在）　$0<\sigma_0<\sigma_1^*$ をみたす任意の σ_0 に対して，(5.114)は (ϵ,σ)-族の解 $D^1(\epsilon,\sigma)=(u^1(x;\epsilon,\sigma),v^1(x;\epsilon,\sigma))\in C^2_\epsilon(\bar{I})\times C^2(\bar{I})$ を $Q^1=\{(\epsilon,\sigma)\,|\,0<\epsilon<\epsilon_0,\ 0\leqq\sigma\leqq\sigma_0\}$ でもつ．$D^1(\epsilon,\sigma)$ は Q^1 で $C^2_\epsilon(\bar{I})\times C^2(\bar{I})$ の位相で一様有界かつ連続であり，$\overline{Q}_1$ で $L^2(I)\times C^1(\bar{I})$ の位相で連続である．さらに次が成り立つ．

（i）　$\lim_{\epsilon\to 0} u^1(x;\epsilon,\sigma)=U^{*,\sigma}(x)$,　$\forall\kappa>0$ で $\bar{I}\backslash I_\kappa$ で一様

（ii）　$\lim_{\epsilon\to 0} v^1(x;\epsilon,\sigma)=V^{*,\sigma}(x)$,　$\bar{I}$ で一様

（iii）　$\lim_{\epsilon\to 0}(\tilde{u}^{\epsilon,\sigma}(y),\tilde{v}^{\epsilon,\sigma}(y))=(\tilde{u}^*(y),v^*)$, $\forall K\subset\mathbb{R}$，コンパクト集合上 $C^2(K)$ の位相で一様

ここで，$I_\kappa=(x_1^*(\sigma)-\kappa,x_1^*(\sigma)+\kappa)$ であり，また $\tilde{u}^{\epsilon,\sigma}(y)=u^1(x_1^*(\sigma)+\epsilon y;\epsilon,\sigma)$, $\tilde{v}^{\epsilon,\sigma}(y)=v^1(x_1^*(\sigma)+\epsilon y;\epsilon,\sigma)$ である．　□

$D^1(\epsilon,\sigma)$ は(5.114)の**正規 1-遷移層解**とよぶ．次の折り返し原理によって Neumann 境界条件の場合には n-遷移層解がたやすく作れる．

命題 5.24（折り返し原理）　$W(x;\underline{d})$ を $\underline{d}=(\tilde{\epsilon}^2,\tilde{\sigma}^{-1})$ での(5.114)の解とする．このとき，任意の正整数 n に対し，次の $R^n(W)(x)$ は(5.114)の $\underline{d}/n^2=(\epsilon^2,\sigma^{-1})$ における解である．

$$R^n(W)(x)=\begin{cases} W(n(x-i/n);\underline{d}), & i=\text{偶数} \\ W(n(1/n-(x-i/n));\underline{d}), & i=\text{奇数} \end{cases} \tag{5.120}$$

$$\frac{i}{n}\leqq x\leqq\frac{i+1}{n}\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$$ □

直観的には Neumann 条件であるので，境界点で折り返していけば，それは広い区間での解となる．もとの区間 I 上の解に戻すには拡散係数に $1/n^2$ をかけて調節すればよいことを上の命題はいっている．$D^1(\epsilon,\sigma)$ に折り返し原理を適用すれば次を得る．

系 5.25（正規n-遷移層解の存在）　$D^n(\epsilon,\sigma)=(u^n(x;\epsilon,\sigma),v^n(x;\epsilon,\sigma))$ を $R^n(D^1(\tilde{\epsilon},\tilde{\sigma}))$ で定義すると，それは n 個の内部遷移層をもつ(5.114)の解であり，$(\epsilon,\sigma)=(\epsilon/n,n^2\tilde{\sigma})\in Q^n\equiv\{(\epsilon,\sigma)\,|\,0<\epsilon<\epsilon_0/n,\ 0\leqq n^2\sigma_0\}$ で存在す

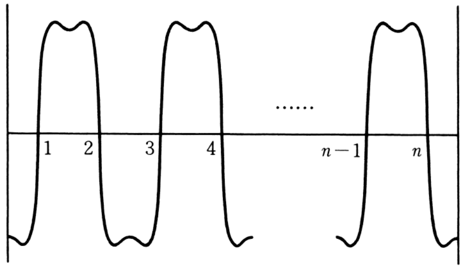


図 5.7　正規 n-遷移層解

る．$D^n(\epsilon,\sigma)$ は**正規 n-遷移層解**とよばれる(図 5.7)．　□

注意 5.26　$D^n(\epsilon,\sigma)$ の $\epsilon\to 0$ での L^2-極限を $(U_n^{*,\sigma}(x), V_n^{*,\sigma}(x))$ とかき，正規 n-遷移層解の **reduced 解**とよぶ．$D^n(\epsilon,\sigma)$ の作り方から，幅 $1/n$ の n 個の小区間 I_j $(j=1,\cdots,n)$ に分割すれば，各小区間に 1-遷移層解がのっている．

(c)　特異固有値と特異固有関数

n-遷移層解 $D^n(\epsilon,\sigma)$ における線形化固有値問題は次のようになる．

$$\mathcal{L}^\epsilon\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} L^\epsilon & f_v^\epsilon \\ g_u^\epsilon & M^\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \tag{5.121}$$

$$(w,z)\in(H_N^2(I))^2$$

ここで

$$L^\epsilon \equiv \epsilon^2\frac{d^2}{dx^2}+f_u^\epsilon \tag{5.122}$$

$$M^\epsilon \equiv \frac{1}{\sigma}\frac{d^2}{dx^2}+g_v^\epsilon \tag{5.123}$$

である．各偏導関数はすべて $D^n(\epsilon,\sigma)$ で値をとり，λ は固有値パラメータである．

固有値問題(5.121)を解く全体の道筋を述べておこう．内部遷移層を伴う特異極限固有値問題に共通の困難は遷移層の平行移動の自由度からくる．遷移層の主要部ともいえる双安定単独方程式 $\epsilon^2 u_{xx}-W'(u)=0$, $u(\pm\infty)=\pm 1$, $x\in$

$\mathbb{R}$ のフロント解での線形化問題は 0-固有値をもち，その固有関数は解の空間微分 u_x に比例する．有限区間に制限したとしても u_x は遷移層の外側では指数的に減衰するので，指数的誤差を除いて u_x は依然として 0-固有関数といえる．超微速運動(§1.3 参照)は実際そのような事情を反映している．

複数個の遷移層があれば，それらは独立に動けると考えると少なくとも遷移層の数に比例した 0 に近い固有値が存在し，対応する固有関数で張られる空間がそのパターンの運動を支配しているだろう．一般に，$\epsilon \to 0$ と共に原点に近づく(虚軸を横切る場合については注意 5.42 参照)固有値を**特異固有値**とよぼう．n 個の遷移層をもつ $D^n(\epsilon, \sigma)$ に対しては少なくとも n 個の特異固有値が現れると考えられる．スカラー方程式の場合にはすべての遷移層解は不安定であったが(定理 4.15 参照)，それはポテンシャル力 W によってのみ駆動されていたからであった．制御変数 v が加わったシステムでは，v の空間分布の形状が遷移層の運動を支配しそれがパターンを安定化する．いわば v が作る空間的制御場の中を u の遷移層が運動するわけである．スケールの異なる 2 つの量が相互作用することにより微妙にダイナミクスが制御されるところにシステムの面白さ(と同時に難しさ)がある．

以下に述べる n-遷移層の SLEP 法によるスペクトル解析は次の 2 段階に分かれる．

(i)　ポテンシャル力 W からくる寄与

(ii)　v の制御場との相互作用

(i)は本質的に u の部分系の Sturm–Liouville 方程式を考察することになる．ちょうど n 個の 0 に近い特異固有値がそれによりとり出される．(ii)は(i)の結果を v の式へ代入し，制御場との相互作用を調べることになるが，その際，上に述べたスケールの差異による困難が生じる．すなわち v のスケールで見ていると(i)で得られた特異固有関数は $\epsilon \to 0$ では通常の関数の枠には納まらなくなる．SLEP 法の本質は**特異固有関数のもつ情報を遷移層の存在する場所に分布する超関数と特徴づけ，制御場 v の方程式にとり込むことにある**．

これにより，固有値問題が遷移層上の問題に縮約され，1 次元の場合にはある対称行列の固有値問題に帰着される．この基本的アイデアは[219]，[218]

によって最初に述べられ，その後多くの応用があった([220], [221], [270] など).

まず次の Sturm–Liouville 問題から考えよう.

$$
(5.124)\qquad \begin{cases} L^\epsilon \phi = \zeta\phi, & x \in I \\ \phi \in H_N^2(I), & \|\phi\|_{L^2(I)} = 1 \end{cases}
$$

これは自己共役問題であるので，固有値 ζ は実数であり，$\{\zeta_i^\epsilon, \phi_i^\epsilon\}_{i=0}^\infty$ は完全正規直交基底を示す．これらは ϵ と共にどのように振舞うのであろうか．最初の n 個のみに注意を払えばよいことが次の補題からわかる.

補題 5.27 L^ϵ の最初の n 個の固有値 $\{\zeta_i^\epsilon\}_{i=0}^{n-1}$ は ϵ と共に 0 へ近づく．残りは一様に真に負の範囲にとどまる. □

ここで詳しい説明は[218]に譲るが，1 つの遷移層のみを含む $1/n$-小区間で Dirichlet 条件を両端に課した問題を考え，その最大固有値 ζ_0^ϵ が n 個の特異固有値と非特異固有値の間の仕切りとなることを比較定理を用いて示すことができる．その際 ζ_0^ϵ に対応する固有関数を I 全体へ奇関数的に拡張したものは I の内部に $(n-1)$ 個の零点をもつ．したがって Neumann 境界条件下での特異固有値の最小のものも $(n-1)$ 個の零点をもつことになる.

これら n 個の特異固有関数 $\{\phi_i^\epsilon\}_{i=0}^{n-1}$ のそれぞれは幅 $1/n$ の各小区間で，実はスケールしてみれば最初に述べた双安定単独方程式のフロント解の空間微分に比例していることが示せる．そのためにいくつかの記号を次に準備しておこう.

(5.125)

$\phi_{ij}^\epsilon \equiv \phi_i^\epsilon|_{I_j}$; 第 i 固有関数の小区間 I_j への制限,

$\tilde{\phi}_{ij}^\epsilon = \tilde{\phi}_{ij}^\epsilon(y) \equiv \phi_{ij}^\epsilon(x_j^* + \epsilon y)$; 引き延ばし変数による表示，$y \in \widetilde{I}_j$

$$
\int_I |\phi_i^\epsilon|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |\phi_{ij}^\epsilon|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\widetilde{I}_j} |\sqrt{\epsilon}\,\tilde{\phi}_{ij}^\epsilon|^2 dy
$$

となるので，$\hat{\phi}_{ij}^\epsilon$ を $\hat{\phi}_{ij}^\epsilon \equiv \sqrt{\epsilon}\,\tilde{\phi}_{ij}^\epsilon\ (y \in \widetilde{I}_j)$ で定義する．明らかに

$$\int_I |\phi_i^\epsilon|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\tilde{I}_j} |\hat{\phi}_{ij}^\epsilon|^2 dy$$

である．また，$\hat{\phi}_0^*$ および $\hat{\phi}_L^*$ を $\dfrac{d^2}{dy^2}\tilde{\phi}+f_u(\tilde{u}^*, v^*)\tilde{\phi}=\zeta\tilde{\phi}$ の，主線形固有関数の L^2-正規化，および L^1-正規化したものとする．すなわち

$$\|\hat{\phi}_0^*\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_L^* dx = 1$$

とする．これはフロント解の空間微分 $\dfrac{d}{dy}\tilde{u}^*$ と次のような関係がある．

(5.126)
$$\hat{\phi}_0^* = \frac{\gamma^*}{c^*}\frac{d}{dy}\tilde{u}^*, \quad \hat{\phi}_L^* = \gamma^* \frac{d}{dy}\tilde{u}^*$$

ここで

(5.127)
$$c^* = \|\hat{\phi}_L^*\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \gamma^* \equiv \frac{1}{h_+(v^*)-h_-(v^*)}$$

とする．また $\tilde{I}_j$ などに引き延ばされた関数の定義域は遠方で恒等的に 0 となるように $\mathbb{R}$ 全体に滑らかに拡張しておく．

補題 5.28（$\hat{\phi}_{ij}^\epsilon$ **のプレコンパクト性**）　$\hat{\phi}_{ij}^\epsilon$ の部分列 $\hat{\phi}_{ij}^{\epsilon_m}$ $(\lim_{m\to\infty}\epsilon_m=0)$ がとれて

(5.128)
$$\lim_{m\to\infty}\hat{\phi}_{ij}^{\epsilon_m} = \kappa_j^i \hat{\phi}_L^* \qquad C^2(\mathbb{R}) \text{ において}$$

がすべての i,j について一様に成り立つ$(0\leqq i\leqq n-1,\ 1\leqq j\leqq n)$．また各 $i\,(0\leqq i\leqq n-1)$ に対して

(5.129)
$$c^*\boldsymbol{k}^i = c^*(\kappa_1^i, \cdots, \kappa_n^i)$$

で定義されるベクトル $\{c^*\boldsymbol{k}^i\}_{i=0}^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす．　□

以上の準備から ζ_i^ϵ の $\epsilon\to 0$ での挙動がわかる．

命題 5.29（**特異固有値の漸近挙動**）　$\{\zeta_i^\epsilon, \phi_i^\epsilon\}$ を Neumann 境界条件下での $D^n(\epsilon,\sigma)$ における線形化固有値問題 $L^\epsilon\phi=\zeta\phi$ の正規直交固有関数対とする．最初の n 個の固有値 $\zeta_0^\epsilon>\cdots>\zeta_{n-1}^\epsilon$ は L^ϵ の特異固有値であり，$\epsilon>0$ で正となり，さらに次の漸近挙動をもつ．

(5.130)
$$\zeta_i^\epsilon = \hat{\zeta}_i(\epsilon;\sigma)\epsilon\sigma + e_i(\epsilon,\sigma)$$

ここで，$\hat{\zeta}_i$ および $e_i\,(i=0,\cdots,n-1)$ は Q^n で正値連続関数であり，次をみたす．

$$(5.131)\quad \begin{aligned}\hat{\zeta}^* &= \lim_{\epsilon\to 0}\hat{\zeta}_i(\epsilon,\sigma)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\gamma^*}{c^*}\right)^2 J'(v^*)\int_0^{x_1^*\left(\frac{\sigma}{n^2}\right)} g\bigl(U^{*,\sigma/n^2}, V^{*,\sigma/n^2}\bigr)dx > 0,\\ &|e_i(\epsilon,\sigma)| \leqq C\exp\Bigl(-\frac{\gamma}{\epsilon}\Bigr)\end{aligned}$$

残りの固有値 $\zeta_i^\epsilon\ (i \geqq n)$ は ϵ に関して一様に負である．極限値 $\hat{\zeta}^*$ は i によらないことに注意しよう． □

(d) SLEP 法

線形化問題 $\mathcal{L}^\epsilon$ (5.121)を解く際の最も困難な点は，正規 n-遷移層解が外部問題と内部問題に対する2つの空間スケールをもつのに応じて $\mathcal{L}^\epsilon$ にも2つのスケールが共存する点である．いいかえれば，両方からくる情報を失わない形で $\mathcal{L}^\epsilon$ の特異極限形をどのように得るかということである．基本的には L^ϵ と同様に n 個の特異固有値の存在証明とその漸近挙動が問題となる．

前節の $\mathcal{L}^\epsilon$ の特異固有関数にリスケーリングを施すことにより，内部問題からくる情報を遷移層の存在場所に分布する超関数と捉えることにより，最終的に $n\times n$ 実対称行列の固有値問題に帰着することができる．この解が $\mathcal{L}^\epsilon$ の特異固有値の漸近挙動を決定する．

まず問題を特異部分と非特異部分に分けることから始めよう．

固有値問題(5.121)の第1式を w について解くと

$$(5.132)\qquad w = (L^\epsilon-\lambda)^{-1}(-f_v^\epsilon z)$$

となるが，λ がもし L^ϵ の固有値のどれかに一致すればこの式は意味をなさない．しかし $\epsilon>0$ では，$\mu>0$ を適当にとれば，$\lambda\in\Lambda_1\equiv\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda>-\mu\}$ の範囲では $\mathcal{L}^\epsilon$ の特異固有値は L^ϵ のそれに一致しないことが確かめられるので，(5.132)を固有関数展開したのち，第2式へ代入すると

$$(5.133)\quad \frac{1}{\sigma}\frac{d^2}{dx^2}z + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\langle -f_v^\epsilon z, \phi_i^\epsilon\rangle}{\zeta_i^\epsilon-\lambda}g_u^\epsilon\phi_i^\epsilon + g_u^\epsilon(L^\epsilon-\lambda)^\dagger(-f_v^\epsilon z) + g_v^\epsilon z = \lambda z$$

を得る．ここで $(L^\epsilon-\lambda)^\dagger$ は一般化レゾルベント

(5.134)

$$(L^\epsilon-\lambda)^\dagger(\cdot)\equiv\sum_{i\geqq n}\frac{\langle\cdot,\phi_i^\epsilon\rangle}{\zeta_i^\epsilon-\lambda},\quad \phi_i^\epsilon\colon L^2(I)\to L^2(I)\cap\{\phi_0^\epsilon,\cdots,\phi_{n-1}^\epsilon\}^\perp$$

である．特異固有関数部分とそれ以外に分けたことになる．(5.134)は遷移層部分をはずした外部問題のレゾルベントに相当し，その極限は次のように特徴づけられる．

命題 5.30 (**$(L^\epsilon-\lambda)^\dagger$ の漸近極限**)　$(L^\epsilon-\lambda)^\dagger$ は，ϵ について一様に L^2-有界な作用素であり，漸近的には次の意味で**かけ算作用素**に収束する．

$$\lim_{\epsilon\to 0}(L^\epsilon-\lambda)^\dagger(F^\epsilon h)=\frac{F^*h}{f_u^*-\lambda},\quad \forall h\in L^2(I)\cap L^\infty(I),\quad \lambda\in\Lambda_1 \tag{5.135}$$

収束は強 L^2 の意味であり，もし $h\in H^1(I)$ ならば $H^1(I)$ の任意有界集合上で収束は一様である．$F(u,v)$ は滑らかな関数とし，$F^\epsilon\equiv F(D^n(\epsilon,\sigma))$ および $F^*\equiv F(U_n^{*,\sigma},V_n^{*,\sigma})$ である．　□

この命題は特異部分をはずせば，$\epsilon\to 0$ の極限で L^ϵ の 2 階微分項 $\epsilon^2\dfrac{d^2}{dx^2}$ を無視することができて，逆作用素は L^2 の意味で $f_u^*-\lambda$ で割ることと同じになることを言っている．

システムの固有値問題 $\mathcal{L}^\epsilon$ の固有値は，L^ϵ のそれと同じように遷移層の数 n に比例した特異固有値が出現すると考えられる．L^ϵ の場合は自己共役作用素であり，したがって実固有値のみが現れ，また比較定理を用いて厳密に n 個の実特異固有値の存在とその漸近挙動が明らかにされた．しかし，$\mathcal{L}^\epsilon$ に対しては時定数が変われば複素固有値も現れ(注意 5.42 参照)，より注意が必要である．ここでの問題に対しては，スペクトルは原点に近づく特異固有値以外は虚軸から一様に離れていることが示せる．

補題 5.31 (**非特異固有値に対するアプリオリ評価**)　ある $\delta>0$ がとれて，複素平面上で原点中心半径 δ の閉球を B_δ とすれば，十分小さなすべての ϵ に対して B_δ の外にある任意の非特異固有値 λ は

$$\mathrm{Re}\,\lambda<-\mu^*<0,\quad 0<\epsilon<\epsilon_0 \tag{5.136}$$

をみたす．ここで μ^* は δ および ϵ に依存しない．　□

したがって，以下では特異固有値 $\lambda=\lambda(\epsilon)\in B_\delta$，$\lim_{\epsilon\to 0}\lambda(\epsilon)=0$ のみに着目し，しかもそれは実であるとしよう(このことは証明できる)．このとき，命題 5.29 より(5.133)の左辺第 2 項の分母はすべて $\epsilon\to 0$ のとき，0 へ行く．実は分子も 0 へ行くのでこの特異項は不定形となる．したがって何らかのリスケーリングによる漸近的特徴づけを行わないとこのままでは取り扱えない．一方，この特異項以外，(5.133)は次の意味で緩やかな作用素となる．

補題 5.32 (**有界作用素** $K^{\epsilon,\lambda}$)　$B^{\epsilon,\lambda}$ を次で定義される H^1 上の双 1 次形式とする．

(5.137)　$$B^{\epsilon,\lambda}(z_1,z_2)=\frac{1}{\sigma}\langle z_x^1,z_x^2\rangle-\langle\{g_u^\epsilon(L^\epsilon-\lambda)^\dagger(-f_v^\epsilon)+g_v^\epsilon-\lambda\}z^1,z^2\rangle$$

$$z^1,z^2\in H^1(I),\quad \lambda\in B_\delta$$

このとき与えられた $h\in H^{-1}(I)$ に対し，

(5.138)　$$B^{\epsilon,\lambda}(z,\psi)=\langle h,\psi\rangle,\quad \forall\psi\in H^1(I)$$

は一意的な解 $z=z(h)\in H^1$ を十分小さな ϵ ($\epsilon=0$ も込めて)に対してもつ．この逆作用素 $K^{\epsilon,\lambda}$ を

(5.139)　$$K^{\epsilon,\lambda}h=z(h):\ H^{-1}(I)\to H^1(I)$$

と定義すると，これは作用素ノルムの意味で ϵ について連続的に依存し，λ については解析的となる．　□

注意 5.33　$K^*=\lim_{\epsilon\to 0,\lambda\to 0}K^{\epsilon,\lambda}$ とすると，それは双 1 次形式 B^*

(5.140)　$$B^*(z^1,z^2)=\frac{1}{\sigma}\langle z_x^1,z_x^2\rangle-\left\langle\frac{\det^*}{f_u^*}z^1,z^2\right\rangle$$

からきまる逆作用素になっている．ここで $\det^*\equiv f_u^*g_v^*-f_v^*g_u^*$ である．

この作用素を(5.133)の両辺に施すと

(5.141)　$$z=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\langle -f_v^\epsilon z,\phi_i^\epsilon\rangle}{\zeta_i^\epsilon-\lambda}K^{\epsilon,\lambda}(g_u^\epsilon\phi_i^\epsilon)$$

となり，これは z が $\boldsymbol{A}=(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})$ を実 n 次元ベクトルとして $K^{\epsilon,\lambda}(g_u^\epsilon\phi_i^\epsilon)$ $(i=0,\cdots,n-1)$ の 1 次結合 $z=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iK^{\epsilon,\lambda}(g_u^\epsilon\phi_i^\epsilon)$ の形に書けることを意味している．ここで $\{\phi_i^\epsilon\}_{i=0}^{n-1}$ が 1 次独立ならば $\{K^{\epsilon,\lambda}(g_u^\epsilon\phi_i^\epsilon)\}_{i=0}^{n-1}$ も 1 次独立となる

ことに注意しよう.

この1次結合の形を(5.141)へ代入すれば，われわれの問題は次の n 次元固有値問題を解くことと同値になる.

$$M^\epsilon \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (\zeta_0^\epsilon - \lambda)\alpha_0 \\ \vdots \\ (\zeta_{n-1}^\epsilon - \lambda)\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.142}$$

ここで $M^\epsilon = \{\langle -f_v^\epsilon \phi_i^\epsilon, K^{\epsilon,\lambda}(g_u^\epsilon \phi_j^\epsilon)\rangle\}_{i,j}$ である. M^ϵ は $K^{\epsilon,\lambda}$ を通じて λ にも依存している. また右辺も成分ごとにかかっている係数が異なり，かつどれもが0へ収束するのでこのままでは解けない.

これを一挙に解決するのが，次の特異固有関数のリスケーリングによる漸近的特徴づけである.

命題 5.34 (**特異固有関数の漸近極限**)　$\{\phi_i^{\epsilon_m}\}$ を補題5.28の任意の部分列とする. このとき

$$\lim_{m\to\infty} -f_v^{\epsilon_m}\frac{\phi_i^{\epsilon_m}}{\sqrt{\epsilon}} = c_1^* \Delta_i \equiv c_1^* \sum_{j=1}^n \kappa_j^i \delta(x - x_j^*(\sigma)) \tag{5.143}$$

$$\lim_{m\to\infty} g_u^{\epsilon_m}\frac{\phi_i^{\epsilon_m}}{\sqrt{\epsilon}} = c_2^* \Delta_i \equiv c_2^* \sum_{j=1}^n \kappa_j^i \delta(x - x_j^*(\sigma)) \tag{5.144}$$

が共に $H^{-1}(I)$ の意味で成り立つ. ここで

$$c_1^* = -\gamma^* J'(v^*), \quad c_2^* = \gamma^*\{g(h_+(v^*), v^*) - g(h_-(v^*), v^*)\}$$

であり，$\delta(x - x_j^*(\sigma))$ は $x = x_j^*(\sigma)$ における Dirac の δ 関数である. □

この結果を行列 $M^{\epsilon,\lambda}$ に適用しよう. 以下では部分列 ϵ_m は ϵ と書くことにする. (5.142)の両辺を ϵ で割ると左辺は

$$M^\epsilon/\epsilon = \left\{\left\langle -f_v^\epsilon \frac{\phi_i^\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}, K^{\epsilon,\lambda}\left(g_u^\epsilon \frac{\phi_i^\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right\rangle\right\}_{i,j}$$

となるので $\epsilon \to 0$ とすると，命題5.29および5.34，注意5.33より，次の極限方程式を得る.

$$\widehat{M}^* \boldsymbol{A} = (\sigma\hat{\zeta}^* - \tau^*)\boldsymbol{A} \tag{5.145}$$

ここで $\widehat{M}^* \equiv \lim_{\epsilon\to 0} M^\epsilon/\epsilon = c_1^* c_2^* \{\langle \Delta_i, K^* \Delta_j \rangle\}_{i,j=0}^{n-1}$，　$\tau^* \equiv \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(\epsilon)/\epsilon$ である．さらに特異固有値 λ は $O(\epsilon)$ であること，すなわち次を用いた．

補題 5.35（特異固有値のオーダー） 任意の特異固有値 λ は次の形にかける．

$$\lambda = \epsilon\tau(\epsilon, \sigma) \tag{5.146}$$

ここで τ は $\epsilon = 0$ まで込めて有界な関数である． □

$\epsilon > 0$ では $M^{\epsilon,\lambda}$ は対称行列ではないが，極限形 $\widehat{M}^*$ は対称行列となることに注意しよう．

以上により，すべては n 次元の行列の固有値問題(5.145)——SLEP 系とよぶ——に帰着された．しかし，この形のままでは $\widehat{M}^*$ は Δ_i に依存し，Δ_i は ϵ_m の部分列のとり方によるかもしれないという心配がある．

このことは実は底の変換を行えば，次のような部分列によらない普遍的な形に変形できることにより解消する．そのために，注意 5.33 で述べた K^* の Green 関数 G_N を導入しよう．

$$K^*\phi = \langle G_N(x,y), \phi \rangle, \quad \forall \phi \in H^{-1}(I) \tag{5.147}$$

添字の N は Neumann 境界条件を意味している．いま，対称行列 $\boldsymbol{G}_N$ を次で定義する．

$$\boldsymbol{G}_N \equiv \{G_N(x_i^*(\sigma), x_j^*(\sigma))\}_{i,j=1}^n \tag{5.148}$$

これを用いると $\langle \Delta_i, K^* \Delta_j \rangle = {}^t\boldsymbol{k}^i \boldsymbol{G}_N \boldsymbol{k}^j$ となるので $\widehat{M}^* = c_1^* c_2^* \{\langle \Delta_i, K^* \Delta_j \rangle\}_{i,j}$ は次のように書き直せる．

補題 5.36（標準 SLEP 行列） $\widehat{M}^*$ は次の直交変換により K^* の Green 関数からきまる対称行列 $\boldsymbol{G}_N$ に相似となる．

$$\widehat{M}^* = {}^tP\widehat{\boldsymbol{G}}_N P$$

ここで $P \equiv \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{k}^0, \boldsymbol{k}^1, \cdots, \boldsymbol{k}^{n-1})$（補題 5.28）であり，

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_N \equiv \frac{c_1^* c_2^*}{(\boldsymbol{c}^*)^2} \boldsymbol{G}_N \tag{5.149}$$

で与えられる．係数は(5.127), (5.143), (5.144)で定義されたものである． □

注意 5.37　遷移層からくる情報は，その位置 $\{x_i^*(\sigma)\}_{i=1}^n$ と係数 $\boldsymbol{c}^*$ たちに集約されている．

かくして，解くべき問題は

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_N \boldsymbol{A} = (\sigma\hat{\zeta}^* - \tau^*)\boldsymbol{A} \qquad \text{(標準 SLEP 系)} \tag{5.150}$$

となる．これを解く際の重要な鍵は，$\widehat{\boldsymbol{G}}_N$ そのものではなくその**逆行列** $\widehat{\boldsymbol{G}}_N^{-1}$ を調べることである．なぜなら次の補題が成り立つ．

補題 5.38（$\widehat{\boldsymbol{G}}_N^{-1}$ **の3重対称性**）　$\widehat{\boldsymbol{G}}_N^{-1}$ は実対称3重対角行列となり，その固有値は n 個の互いに異なる正実固有値

$$0 < \gamma_0^{-1} < \gamma_1^{-1} < \cdots < \gamma_{n-1}^{-1} \tag{5.151}$$

から成る．　□

これより明らかに τ^* の言葉でいいかえると，$\tau_i^* = \sigma\hat{\zeta}^* - \gamma_i$ ($\tau_0^* < \tau_1^* < \cdots < \tau_{n-1}^*$) という n 個の相異なる固有値の存在を示したことになるが，**符号**についてはこのままではわからない．ここでも実は境界条件を Dirichlet 条件に変更した固有値問題との比較が鍵となる．

実際 $\mathcal{L}^\epsilon$ を Dirichlet 条件下で考えると，正規 n-遷移層解の x-微分は 0-固有値に対応する固有関数となり，特異極限においても形式的にかけば $\widehat{\boldsymbol{G}}_D \boldsymbol{B} = (\sigma\hat{\zeta}^* - \tau^*)\boldsymbol{B}$ という問題は $\tau^* = 0$ という解をもつ．$\widehat{\boldsymbol{G}}_N$ と $\widehat{\boldsymbol{G}}_D$ の固有値を比較することにより，$\tau_{n-1}^* < 0$ が結論できる．

定理 5.39（**標準 SLEP 系の固有値**）　標準 SLEP 系(5.150)は n 個の相異なる実解 τ_i^* ($i = 0, \cdots, n-1$)

$$\tau_0^* < \tau_1^* < \cdots < \tau_{n-1}^* < 0 \tag{5.152}$$

をもつ．　□

以上より陰関数定理を用いれば，もとの $\mathcal{L}^\epsilon$ の特異固有値について次のように結論される．

定理 5.40　ある $\hat{\epsilon} > 0$ がとれて，$\mathcal{L}^\epsilon$ は n 個の相異なる実の特異固有値 $\lambda = \lambda_k^c(\epsilon)$ ($k = 0, \cdots, n-1$) をもち，それらは単純かつ $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ で連続であり，$\epsilon \to 0$ のとき

$$\lambda_k^c(\epsilon) \simeq \tau_k^* \epsilon, \qquad k = 0, \cdots, n-1 \tag{5.153}$$

のように振る舞う．対応する特異固有関数 $\phi^k(\epsilon) = {}^t(w^k(\epsilon), z^k(\epsilon))$ は次の漸近形をもつ．

$$(5.154)\quad \lim_{\epsilon\to 0}\boldsymbol{\Phi}^k(\epsilon)=\boldsymbol{\Phi}^{k^*}=\begin{pmatrix} w^{k^*} \\ z^{k^*}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} q_j^k\delta_{x_j}-\dfrac{f_v^*}{f_u^*}c_2^*\sum_{j=1}^{n} q_j^k K^*\delta_{x_j} \\ c_2^*\sum_{j=1}^{n} q_j^k K^*\delta_{x_j}\end{pmatrix}$$

ここで $\boldsymbol{q}^k=(q_1^k,\cdots,q_n^k)\ (\|q^k\|=1)$ は $\widehat{\boldsymbol{G}}_N$ の γ_k に対する固有ベクトルであり，δ_{x_j} は $x=x_j^*(\sigma)$ における Dirac の δ 関数である． □

§5.4(a)での特異極限系についての考察を合せると，以上の結果は次の可換図式が成り立つことを意味する．

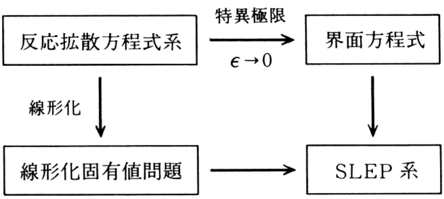


図 5.8 反応拡散方程式系と SLEP 系

注意 5.41 $\tau_{n-1}^*<0$ および補題 5.31 より正規 n-遷移層解は(局所)**漸近安定**となる．

注意 5.42 反応拡散方程式系(5.112)において u と v の間に拡散の違いのみならず反応の時定数が異なると，一般に正規 n-遷移層解は不安定化する．実際 u_t の前に $\epsilon\tau$ がかかった $(\tau>0)$，

$$(5.155)\quad \begin{cases} \epsilon\tau u_t=\epsilon^2 u_{xx}+f(u,v) \\ v_t=\dfrac{1}{\sigma}v_{xx}+g(u,v) \\ u_x=v_x=0 \end{cases}$$

という系を考えると，τ が小さくなると Hopf 分岐が生じることが SLEP 解析を用いて厳密に示せる([220], [134]参照)．このときには不安定化した定常解に代わって，図 5.9 のような時間周期的な**呼吸解**(breathing pattern)が出現する．しかし，一般に n 個の遷移層があるときの n 重 Hopf 分岐の解析はよくわかっていない．

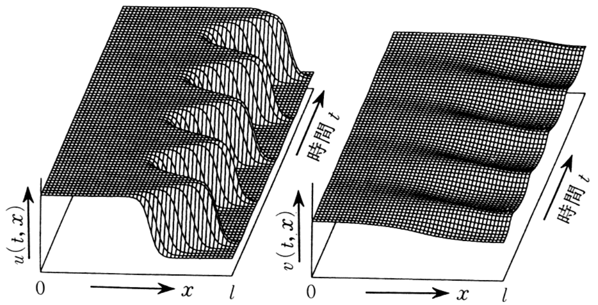


図 5.9 呼吸解

$$f(u,v)=u(1-u^2)-v,\quad g(u,v)=u+d-8v$$
$$\epsilon=0.05,\ d=-0.1,\ l=\pi/2,\ \sigma=1,\ \tau=0.04$$

§5.5 特異均衡スケーリング

第 4 章で論じた Turing 不安定性がおこるためには $D_u<D_v$ が必要であった．とくに ϵ を小さい正定数として $D_u=\epsilon^2$ はそれをみたす特別な場合でもあり，前節でみたように，空間 1 次元の場合には特異摂動法が有効に働き，正規 n-遷移層とよばれる解の存在およびその安定性を厳密に論じることができた．

空間多次元の場合には定常問題は次で与えられる．

$$(5.156)\qquad \begin{cases} \epsilon^2\Delta u+f(u,v)=0 & \\ \Delta v+g(u,v)=0 & \Omega \text{ において} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0 & \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな領域である．しかし，これを 1 次元の場合と同様に解くことは容易ではない．それは特異摂動法の種となる(5.156)の帰着方程式((5.117)に対応する)の解を見つけることが困難だからである(あらかじめ界面の位置がわかる境界層型の問題であれば，この困難はない)．

実際，それは次のような自由境界問題となる．帰着方程式は(5.156)で形式的に $\epsilon=0$ とおいたものであり，その第 1 式は $u=h_\pm(v)$ $(x\in\Omega^\pm)$ と解ける．

Ω^+ と Ω^- の間の界面 Γ が自由境界であり，その決定が問題となる．いま簡単のため，Ω^+ は Ω に真に含まれる(したがって $\Gamma=\partial\Omega^+$)とし，$G_\pm(v)\equiv g(h_\pm(v),v))$ とかけば

$$(5.157)\qquad \begin{cases} \Delta V_\pm + G_\pm(V_\pm) = 0 & x\in\Omega^\pm \\ \dfrac{\partial V_-}{\partial n} = 0 & x\in\partial\Omega \\ V_+ \text{ と } V_- \text{ は界面 } \Gamma \text{ で } C^1\text{-級に接合されている} \end{cases}$$

をみたす $V_\pm$ および Γ をみつけるのが帰着方程式である．残念ながら平面波解や球対称解などの特別な場合を除いては，(5.157)については何も知られていないのが現状である．しかし，たとえ Γ がわかり，(5.157)が解けたとしても，高次元空間の場合にはこの方向で議論を進めるのは必ずしも意味があるとは限らない．

次の結果([223]参照)を見よう．

定理 5.43　定常問題(5.156)が $\epsilon=0$ まで込めて滑らかな界面 Γ^ϵ をもつ古典解 $\{(u^\epsilon,v^\epsilon)\}_{0\leqq\epsilon\leqq\epsilon_0}$ をもつならば，それは十分小さい ϵ に対して不安定となる．　□

注意 5.44　(u^ϵ,v^ϵ) が(5.156)の解であるときには，その**界面** Γ^ϵ は次で定義される．

$$(5.158)\qquad \Gamma^\epsilon = \{x\in\Omega \mid u^\epsilon(x)=\alpha^*\}$$

ここで $u=\alpha^*$ は 2 つの安定な枝 $u=h_\pm(v)$ の間の適当な値であり，u は遷移層の内部でこの値をとる．

注意 5.45　(u^ϵ,v^ϵ) は正確には外部問題，内部問題がそれぞれ ϵ について 1 次の漸近展開をもつような解の族であることが要請される．また $\epsilon=0$ まで込めて Γ^ϵ が滑らかであるとは，$\mathbb{R}^N$ に埋め込まれた滑らかな $(N-1)$ 次元コンパクト連結多様体 Γ^0 が存在し，$\epsilon\to0$ のとき Γ^ϵ が Γ^0 へ滑らかに収束することをいう．

この結果は直ちに次の自然な疑問を生む．「安定な解は $\epsilon\to0$ のとき，どのように振る舞うのであろうか」．上の定理の証明は実は滑らかな定常界面 Γ^ϵ に沿って一定の**細かい**波長の摂動を与えると，それは減衰せずに増大することをスペクトル解析によって示すものである．

それでは，どの程度の波長に対して不安定化するのであろうか．次の平面波解の結果([270]参照)が示唆的である(ここでいう平面波解とは1つの内部遷移層をもつ1次元特異摂動解をもう1つの y-方向に単純に拡張したものをいう)．

定理 5.46　Ω を2次元長方形領域とする．そのとき(5.156)の平面波解は $\epsilon\to 0$ のとき不安定となり，その最大成長率をもつ波長は $O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ である．　□

注意 5.47　帰着問題(5.157)の解が存在すると仮定して(5.156)の解が構成できるかという問題は，[255]によって議論された．しかし定理5.43の結果を考慮すれば，後述のリスケールされた(5.159)に対し，その問題を考えるのが自然であり，実際，[255]の手法はその場合にも有効である([269]も参照)．

この結果は平面波解に限らず，一般に定理5.43で述べたような内部遷移層解 $(u^{\epsilon}, v^{\epsilon})$ に対しても成り立つと予想されている．このことは $\epsilon\ll 1$ のときの(5.156)の安定解が $O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ のスケールをもつことを強く示唆している．なぜなら上の定理はすでに十分振幅が発達した遷移層解における結果であり，界面の折りたたみ，つなぎかえは生じるが，振幅の変化はほとんどなく，新たな遷移層の生成あるいは消滅もない．したがって得られる安定解の特徴的長さと上のスケールは一致する可能性は高い．

一方，定数自明解でのスペクトル解析から得られる最不安定波長は十分発達した遷移層解のスケールの予測には一般に使えない．それは途中に遷移層の合体(coasening)などの粗視化過程が入るからである．

もし，この予想が正しいとし，かつその安定解が空間方向に周期的であるとするならば，その周期ユニットの領域 Ω_p は $|\Omega_p| = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ と考えられる．そこで y を引き延ばし変数 $y = x/\epsilon^{\frac{1}{3}}$ とすれば新しいリスケールされた次の定常問題が得られる．

$$(5.159)\qquad \begin{cases} \tilde{\epsilon}^2 \Delta_y u + f(u,v) = 0 \\ \Delta_y v + \tilde{\epsilon} g(u,v) = 0 \end{cases} \qquad y \in \tilde{\Omega}_p$$

ここで $\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon^{\frac{2}{3}}$ であり，$\tilde{\Omega}_p$ は引き延ばされた領域であり，(u,v) は境界 $\partial\tilde{\Omega}_p$ ではその周期パターンに応じた境界条件をみたすとする．(Ω_p の形状そのも

のも決めなければならない未知数である.) $\tilde{\Omega}_p$ は $\tilde{\epsilon}\to 0$ においても有限確定であることに注意しよう．したがって(5.159)の解が安定解の(単位領域での)形状を決定することになる.

上の $\epsilon^{\frac{1}{3}}$-リスケーリングの意味は界面方程式において考えるとはっきりする．一般に α $(0<\alpha<1)$ を未知指数とし，$y=x/\epsilon^{\alpha}$ というリスケーリングを方程式系

$$(5.160)\qquad \begin{cases} u_t = \epsilon^2\Delta u + f(u,v) \\ v_t = \Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

に適用すると次を得る.

$$(5.161)\qquad \begin{cases} u_t = \epsilon^{2(1-\alpha)}\Delta_y u + f(u,v) \\ v_t = \epsilon^{-2\alpha}\Delta_y v + g(u,v) \end{cases}$$

これを

$$(5.162)\qquad \begin{cases} \epsilon^{-(1-\alpha)}u_t = \epsilon^{1-\alpha}\Delta_y u + \epsilon^{-(1-\alpha)}f(u,v) \\ \epsilon^{2\alpha}v_t = \Delta_y v + \epsilon^{2\alpha}g(u,v) \end{cases}$$

とかく．新しい時間変数 $\tau\equiv\epsilon^{1-\alpha}t$ を導入すると

$$(5.163)\qquad \begin{cases} u_\tau = \epsilon^{1-\alpha}\Delta_y u + \epsilon^{-(1-\alpha)}f(u,v) \\ \epsilon^{1+\alpha}v_\tau = \Delta_y v + \epsilon^{2\alpha}g(u,v) \end{cases}$$

とかきかえられる．$\epsilon\to 0$ の界面方程式は，第4章の(4.77)を思い出せば,

$$(5.164)\qquad \begin{cases} \gamma(\tau) = c(v|_\Gamma) - \epsilon^{1-\alpha}\kappa \\ \epsilon^{1+\alpha}v_\tau^{\pm} = \Delta_y v^{\pm} + \epsilon^{2\alpha}G_{\pm}(v^{\pm}) \end{cases}$$

とかける．$v^{\pm}$ は(5.157)の $V_{\pm}$ と同様に定義される．ここで f の v-依存性からくる(4.77)の第3項を無視できるのは次の理由による．われわれはすぐ後で述べるように空間を $1/\epsilon^{\alpha}$ でリスケールしたところで $O(1)$ の大きさの曲率をもつパターンを求めている．したがって，もとの空間スケールで見ると曲率項 $\epsilon\kappa$ の寄与は $O(\epsilon)$ でなく $O(\epsilon^{1-\alpha})$ 程度である．すなわち第3項は第2項より高次となる．さて(5.164)の第2式および $1+\alpha>2\alpha$ に注意すれば,

$$v^{\pm} = v_0^{\pm}(y) + \epsilon^{2\alpha} v_1^{\pm}(y) + o(\epsilon^{2\alpha}) \tag{5.165}$$

であり，かつわれわれは定常解に興味があるので，$v_0^{\pm}(y,\tau) \equiv v^*$ となる．ここで v^* は $c(v^*)=0$ をみたす．

また接合漸近展開の計算により，$v_1^{\pm}$ の界面 Γ での値は一致することがわかるので，(5.165)を(5.164)へ代入して次を得る．

$$\begin{cases} \gamma(\tau) = \epsilon^{2\alpha} c_v(v^*) v_1|_{\Gamma} - \epsilon^{1-\alpha}\kappa \\ \quad 0 = \Delta_y v_1^{\pm} + G_{\pm}(v^*) \end{cases} \tag{5.166}$$

(5.166)への第1式の右辺をみれば，第1項の平行移動からくる速度の項と第2項の曲率項がバランスするのはちょうど $\alpha = \dfrac{1}{3}$ のときに限られる．すなわち空間の $\epsilon^{\frac{1}{3}}$-リスケーリングとは，**漸近展開の平行移動の速度と曲率項の寄与が同等となる**唯一のスケーリングとなっているのである．

これは，一般に散逸系の高次元空間でのパターン形成を論ずる上で極めて重要な視点を与えてくれる．すなわち特異極限において安定な時空パターンは，漸近展開において主要部となり得るすべての項の寄与が同等となるようなスケール——これを**特異均衡スケーリング**とよぼう——に従う．

これがどの程度有効であるかはこれからの課題であるが，すでに第4章の渦巻波の Fife スケーリングにおいてこの特異均衡スケーリングは現れた．また，ここでは論じなかったが共重合ポリマーのモデル(§4.2(d)参照)の界面方程式(それは非同次項をもつ Mullin–Sekerka 問題となる)を導出する際の方針もこれに従っている([222]参照)．

《要約》

5.1　平均曲率流の定義を与え，同時に超曲面からの距離関数がみたす偏微分方程式を導いた．

5.2　特異点を生じた後も有効な曲面運動の記述として等高面法を紹介し，粘性解の基本性質を述べた．単独双安定反応拡散方程式が特異極限で平均曲率流に収束することを証明した．

5.3　結晶成長をはじめ界面ダイナミクスを論じる上で重要な phase field モデ

ルのさまざまなスケーリング極限で得られる界面方程式の導出とその関係を調べた.

5.4 反応拡散系におけるスペクトルの特異極限での振舞いを調べた. 特異極限固有関数を遷移層に分布する超関数ととらえるSLEP法を説明した.

5.5 意味のある特異極限系を得るための一つの有用なスケーリングとして, 特異均衡スケーリングについて述べた.

6 遷移ダイナミクス

これまでは主として漸近的手法によりパターン形成の問題を考えてきた．それにより系を最終的に支配するダイナミクスについて議論することが可能となった．しかし，そのような漸近的方法のみでは捉えきれないさまざまなパターンダイナミクスも多く存在する．それらは遷移的なもの，とらえどころのないもの，うたかたのものと考えられ，最近まで数理の対象としては縁遠い感があったのは否めない．実際，力学系的観点から遷移ダイナミクスをどのように捉えるかという問題は，その重要性と面白味にもかかわらず，さまざまな漸近的手法の発展に比べると大きく立ち後れている．それを記述する数理的枠組みが整備されていないということもあるが，遷移過程そのものがあまり俎上にのぼることがなかったことも大きな原因である．

近年，非平衡・非線形の興味ある現象として，散逸系における粒子解ダイナミクスがある．これは空間的に局在したパルスやスポット解であるが，自己複製や自己崩壊といった大変形を伴うパターンダイナミクスが実験的にも数値的にも確認され，大きな注目を浴びた([66], [236], [245], [246], [247])．これらが遷移ダイナミクスの一つの雛形を与えていることを示す．大域分岐理論の立場からいうと，これらは**極限点の整列階層構造**という特異点構造の結果として現れる必然的なダイナミクスであることがわかる．その際に不安定多様体の連結構造が軌道の振る舞いを制御していることがわかる．また安定な粒子解同士の衝突においても，**不安定秩序解のネットワーク構造**がその

衝突過程の詳細と入出力関係を規定していることを明らかにする.

§6.1　粒子解の自己複製・自己崩壊・衝突ダイナミクス

近年のパターンダイナミクスの焦点は単に定常解や時間周期解を見つけることから，より動的で複雑な時空パターンの探索とその理解へ向かっている．この章では，空間的に局在化したパターン，たとえばパルスやスポットのような**粒子パターン**の動的ダイナミクス，とくに**自己複製**，**自己崩壊**，**衝突による散乱**に焦点を当てる．これらに共通することは解の大きな変形を伴い，その振る舞いを予測し，記述することが一般に困難なことである．たとえば複数の進行する粒子解が存在するとき，それらの間の衝突はほぼ不可避的である．しかし剛体球の弾性衝突と異なり，散逸系の粒子解はその相対速度や系のパラメータに応じて，対消滅，合体，分裂，反射など実に多彩な散乱ダイナミクスを示す．われわれの興味はこれらの最終状態の特徴付けのみならず，そこに至る途中の**遷移ダイナミクス**がどのような機構により駆動され，多彩な出力を生み出しているのかを明らかにすることにある．

自己複製，自己崩壊の2つは，粒子解自身の内的不安定性に起因し，衝突は外的な環境(自分自身と同じ他の粒子解)との相互作用の結果として生じる．注意すべきは，そのように2つに分けた内的不安定性と外的相互作用は実際には共存する場合が多いことである．実際，図6.1のような自己複製過程を見れば，いったん分裂が起きれば粒子解同士の相互作用は必然的に起こり，以後それらは同時進行してゆき，最終的にはある定常状態に落ち着く．ここで系は分裂不安定性をもった孤立した粒子解という状態から安定定常状態へと**1つ階層を超えた状態に遷移した**と見なすことができる．その意味は次である．最終定常状態の任意の1周期分を切り出し，それを新たな場所に移植するとそれは再び分裂を開始する．すなわち切り出した一部分は不安定であるが，それが全体の中に埋め込まれている限り安定に存在するのである．また最終定常状態はある程度大きな摂動を与えられても復元力をもつ．このようなダイナミクスを駆動する数理的構造を明らかにするために，次の3つを

考えよう.

（1）　粒子解を質点とみたときの弱い相互作用と有限次元問題への帰着

（2）　粒子解の内部ダイナミクスの不安定性

（3）　粒子解に関わる不安定解も含めた解の全体が成す大域構造

弱い相互作用，つまり解の重ね合わせが十分に良い近似となり，粒子解同士はテールを通してのみ弱く相互作用するならば，その重心位置の記述で十分であり，結果として有限次元へ縮約できる．しかしその摂動論的取り扱いにはおのずと限界がある．複製・崩壊・衝突などの強い相互作用を記述するにはさらにいくつかの方法を併用し，その全体像を明らかにする必要がある．1つは粒子解そのものが不安定性を内在している場合の弱い相互作用理論の構築である．これにより，少なくとも大変形の起きる「発端」は捕まえることができる．ここで不安定性を内在しているとは，着目している粒子解が有するパラメータを適当に動かせば，高い不安定性を生み出す特異点が近くに存在することを意味する．しかしながら，その後の真の大変形過程をなんらかの意味で厳密に記述することは現段階では依然として困難な問題である．そこで2つ目として，逐一の変形過程を追うのではなく，考えている粒子解を含み，関連する不安定解もすべて考慮した解全体の成す大域構造に着目する．具体的にそれらを数値的に探索し，その大域的相互関係およびその安定性の変化を明らかにすることは現在の計算機の能力をもってしても容易なことではないが，それにより**大変形ダイナミクスを生み出す特徴的な大域分岐構造**を抽出することができる．これは大変形といえども，その始点と終点はある秩序解に近く，それらを駆動する仕掛けは大域分岐構造に組み込まれているはずであるという見方である．たとえば自己複製，自己崩壊に現れる**サドル・ノード分岐点の階層構造**，あるいは時空カオスにおける**一般化されたヘテロクリニックループ軌道**はその例である．これらは「構造探索型数値アプローチ」(付録Aで述べる計算ホモロジーもその1つである)ともいうべきものであり，上の特異点近くの弱い相互作用理論と補完的なものである．

安定な進行パルスや2次元スポットも他の粒子解との衝突により大きく変形する．その散乱過程は極めて複雑であり，多彩なアウトプットが現れるが，

その変形過程は**不安定解の成すネットワーク構造**が裏で制御していることが明らかになる．重要なことは，結果として得られた構造は元のモデル方程式の詳細に依存しないダイナミクス固有の大域幾何構造となり得る点である．

さて，上に述べた自己複製・自己崩壊・衝突の具体例をいくつかのモデル方程式を用いて示そう．

図6.1はGierer–Meinhardt方程式([MEI]およびその文献参照)とよばれる次の形態形成モデルの自己複製パターンとその大域分岐図を示したものである．aは活性因子，hは抑制因子を表し，ϵおよびμは正のパラメータである．

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_t &= \epsilon^2 \Delta a - a + \frac{a^2}{h} \\
\epsilon^2 h_t &= \Delta h - \mu\epsilon^2 h + a^2
\end{aligned}
\right.
\tag{6.1}
$$

そこでは「極限点の階層構造」がはっきりと見える．すなわち山の数(モード数)を固定した定常解の枝はμが増大すると極限点を経て折り返し，それらの位置はほぼ一直線に並ぶ．ただしモード数が大きくなると境界の影響のため，それらの位置はずれてくる．図6.1の時間発展をみると，斥力的にパルスは反発しながら広がり，パルス間距離が一定以上になると分裂する様子がわかる．その個数の増え方は2^n的に$1\to2\to4\to8$ではなく，端に位置するパルスのみが分裂し$1\to2\to4\to6$というように増える．これは見方を変えれば，内部に定常パルスのクラスターを作りながら広がっていく1つの「波」であると見なせる．このクラスターの境界に位置するパルスのみが分裂できるということは6.3節における議論で明らかになる．

図6.2は次のGray–Scottモデル[114], [PEA]の1次元の時空間自己相似パターンを示している．

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_t &= D_u \Delta u - uv^2 + F(1-u) \\
v_t &= D_v \Delta v + uv^2 - (F+k)v
\end{aligned}
\right.
\tag{6.2}
$$

これは酸化・還元反応のモデルの1種で，FIS反応とよばれる化学反応系のダイナミクスを定性的によく記述する([LMPS])．uは基質，vは活性因子，

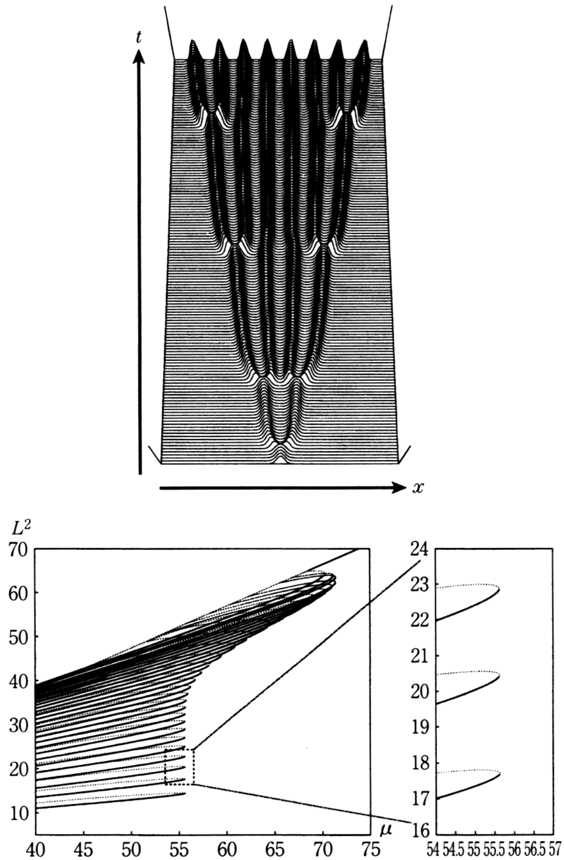


図 6.1　Gierer–Meinhardt モデルにおける自己複製過程．パラメータは $\epsilon^2 = 0.05$ と固定．上の図は 1 次元空間におけるパルスの自己複製の様子を時間軸を縦にとって表示したものである（Neumann 境界条件で $\mu = 56.5$ を採用）．下の図は 1 山からはじまり N 山定常解の枝を抑制因子の減衰率 μ を分岐パラメータとして数値的に求めたものである．パルス間距離が十分ある下の部分では極限点の位置はほぼ一致している．

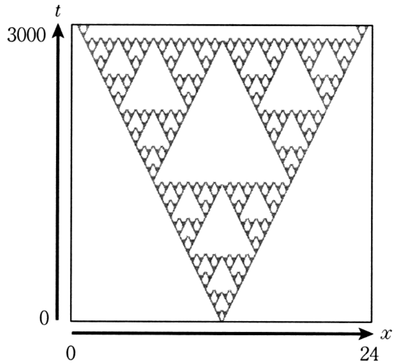


図 6.2 Gray–Scott モデルにおける時空間自己相似パターン v 成分をグレースケールで表示している．パルスの自己複製と対消滅のバランスが Sierpinski ガスケット的自己相似パターンを生み出している．これは最初に早瀬・太田[HO]らにより Bonhoeffer–van der Pol 型の方程式に対して得られた．ここでパラメータは $D_u = 1.15\times10^{-5}$，$D_v = 1.0\times10^{-5}$，$F = 0.02548$，$k = 0.05252$ を採用した．

F は基質の流入，k は除去率，D_u, D_v はそれぞれの拡散係数であり，3 次の非線形性をもつ．1 次元パルスが分裂して自己複製するが，生み出されたパルス達は一定のルールで衝突時に対消滅し，Sierpinski ガスケット的自己相似パターンを生み出している．

図 6.3 は同じ Gray–Scott モデルの空間 2 次元における数値シミュレーションを示したものである．スポット状の島の自己複製と自己崩壊が同時に起こり，複雑な時空カオス的振る舞いが観察される．空間 1 次元においても同様な時空カオスが観察される．6.4 節において，大域分岐解析の観点からそのようなダイナミクスが無限次元空間でのヘテロクリニックループが駆動している可能性について議論する．

この章の構成は以下のようになっている．6.2 節では弱い相互作用理論の

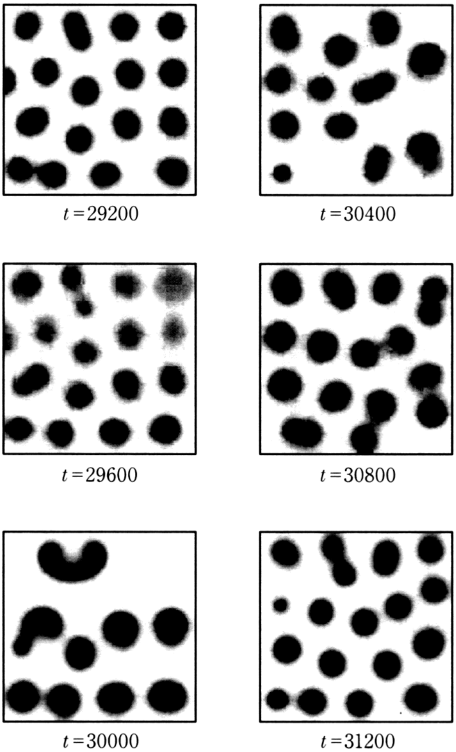


図 6.3 Gray–Scott モデルにおける 2 次元時空カオスパターン．領域が島状のスポットで埋めつくされた後，スポット間にある種の競合がおこる．右上の 4 つの島は $t=29600$ で一斉に消え始め，$t=30000$ では完全に消滅する．一方，まわりにあった島はこの空地に侵入すると同時に分裂を始め，$t=31200$ では再び 4 つの島の状態に戻っている．このような崩壊と分裂による複製が次々とおこり，全体としては時空カオスとなる．ここでパラメータは以下を採用した．$D_u=1.15\times10^{-5}$, $D_v=1.0\times10^{-5}$ $F=0.018$, $k=0.054$.

枠組みを空間1次元の場合について述べる．パルス間距離が十分離れている場合の引力的あるいは斥力的相互作用が記述できる．6.3節では内的不安定性がきっかけとなり生じる自己複製および自己崩壊という大変形ダイナミクスを取り扱う．いずれの場合も複数の解の枝のサドル・ノード分岐点が成す大域的構造が重要な役割を果たす．また分裂不安定性を有する場合の弱い相互作用理論についても簡単に触れる．6.4節では6.3節で述べた互いに逆向きの2つの大変形過程である複製と崩壊が組み合わさった時空カオスについて議論する．一般化されたヘテロクリニックループ構造がそれを駆動していることが示される．最後の6.5節では外的環境との相互作用，とくに他の粒子解との衝突現象について述べる．衝突に伴う変形が関連する不安定解達のヘテロクリニック結合により制御されていることが示される．

この章に関連する全般的話題については[NIS2], [NIS3], [OHT], [MIU], [VUE]を見られるとよいであろう．

§6.2　粒子解の弱い相互作用

(a)　1次元粒子解

空間1次元において一般的な反応拡散系

(6.3)
$$\boldsymbol{u}_t = D\boldsymbol{u}_{zz} + F(\boldsymbol{u})$$

を考える．ここで $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$，$D$ は非負な対角行列で，非線形項 F は滑らかとする．さらに $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ は常微分方程式 $\boldsymbol{u}_t=F(\boldsymbol{u})$ の安定な平衡点とする．ここで(6.3)の速度 c をもつ**1次元粒子解**(**パルス解**)$P(z)=P(x-ct)$ とは次をみたす**ホモクリニック軌道**のことである．

H1)　$P(z)$ は方程式

(6.4)
$$\mathcal{L}(P) = DP_{zz} - cP_z + F(P) = \boldsymbol{0}$$

をみたし，かつある正数 α, β, γ が存在し，遠方で単調に指数減衰，すなわち $P(z)=e^{-\alpha z}(\boldsymbol{a}^+ + O(e^{-\gamma z}))$ $(z\to+\infty)$ および $P(z)=e^{\beta z}(\boldsymbol{a}^- + O(e^{\gamma z}))$ $(z\to-\infty)$ をみたす．ここで $\boldsymbol{a}^\pm$ はある定ベクトルである．

H2)　$P(z)$ は安定である．すなわち P での線形化作用素 L

(6.5)　$$Lv = Dv_{zz} - cv_z + F'(P(z))v, \quad v \in H^2(\mathbb{R}^1)$$

のスペクトルは平行移動に帰因する零固有値を除いて，すべて真に左半平面にある．この零固有値に対応する固有関数は明らかに P_z である．P_z に対しても上の H1)で述べた指数減衰は引き継がれる．L の共役作用素 L^* も同様に零固有値をもち，その固有関数を ϕ^* とかくと，それは $\phi^*(z) = e^{-\beta z}(\boldsymbol{b}^+ + O(e^{-\gamma z}))$ $(z \to +\infty)$ および $\phi^*(z) = e^{\alpha z}(\boldsymbol{b}^- + O(e^{\gamma z}))$ $(z \to -\infty)$ をみたす．ここで $\boldsymbol{b}^\pm$ はある定ベクトルである．さらに $\langle P_z, \phi^* \rangle_{L^2} = 1$ と正規化しておく．

(b)　弱い相互作用

ある安定なパルスがあるとき，それらのコピーを2つ作り，それらを距離 h をおいて並べよう．指数減衰することから h が大きければ，コピーの単純な重ね合わせは真の解に近いと考えてよい．つまり平行移動に伴う h でパラメータ付けられた族はある(局所)不変多様体の第一近似になっていると期待される．さらにこの不変多様体上のダイナミクスは重心の動きとパルス間の距離だけで書けるであろう(実際，[EI1]により厳密に示された)．これは大幅な自由度の縮約になっている．「弱い」という正確な意味は，相互作用をして「いない」ときの単独のパルスの「重ね合わせ」を種として，真の解が摂動的に構成できるということにある．パルスの速度を c とし，動座標系 $\tilde{z} = z + ct$ にのって方程式(6.3)を書き換えると(以下 $\tilde{z}$ は z と書く)

(6.6)　$$\boldsymbol{u}_t = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}) = D\boldsymbol{u}_{zz} - c\boldsymbol{u}_z + F(\boldsymbol{u})$$

となる．それぞれのパルスの位置座標を y_i $(i = 1, 2)$ とすると，これらの重ね合わせは

(6.7)　$$P(z - y_1(t)) + P(z - y_2(t))$$

となる．これを(6.6)に代入すると左辺は $-P_z\dot{y}_1 - P_z\dot{y}_2 + \cdots$ となるので，両辺に ϕ^* をかけ積分すると次が得られる．

$$\dot{y}_1 = -\langle \mathcal{L}(P(z) + P(z-h)), \phi^* \rangle_{L^2}$$
$$\dot{y}_2 = -\langle \mathcal{L}(P(z) + P(z+h)), \phi^* \rangle_{L^2}$$

ここで座標の原点は各々 $z = y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ に移したこと，および正規化

$\langle P_z, \phi^* \rangle_{L^2} = 1$ を用いた．$h = y_2 - y_1$ が十分大きいとき，右辺の主要部は h の閉じた式で表現できる．実際，それは次のようになる．

$$\dot{h} \sim M_\beta e^{-\beta h} - M_\alpha e^{-\alpha h} \tag{6.8}$$

ここで係数は

$$\begin{aligned} M_\beta &= 2\beta \langle \boldsymbol{a}^-, D\boldsymbol{b}^+ \rangle - c \langle \boldsymbol{a}^-, \boldsymbol{b}^+ \rangle \\ M_\alpha &= 2\alpha \langle \boldsymbol{a}^+, D\boldsymbol{b}^- \rangle + c \langle \boldsymbol{a}^+, \boldsymbol{b}^- \rangle \end{aligned} \tag{6.9}$$

これは仮定 H_1, H_2 で述べたパルスの遠方での挙動や共役固有関数の指数減衰を用いて，次が成り立つことによる．

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(P(z) + P(z-h)), \phi^* \rangle_{L^2} &= M_\beta e^{-\beta h}(1 + O(e^{-\gamma h})) \\ \langle \mathcal{L}(P(z) + P(z+h)), \phi^* \rangle_{L^2} &= M_\alpha e^{-\alpha h}(1 + O(e^{-\gamma h})) \end{aligned}$$

パルスが互いに引き合うか，反発するかは係数 M_α, M_β の符号に依存する．これらは定義(6.9)より解および固有関数の漸近的振る舞いから決定することができる．進行パルスは進行方向とその逆方向では形が一般に非対称となる．実際，FitzHugh–Nagumo 方程式では進行方向と反対向きの解の減衰がゆっくりとなり，係数 M_α, M_β の間に大きな差が生じ,「反発」することが具体的に計算できる．

とくに定常パルス解，すなわち速度 $c=0$ のときは式が対称となり，取り扱いやすい．一般的に $N+1$ 個の定常パルスがあるときの相互作用は次のように書ける．

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -M_0(e^{-\alpha h_2} - 2e^{-\alpha h_1}) \\ \dot{h}_j = -M_0(e^{-\alpha h_{j-1}} - 2e^{-\alpha h_j} + e^{-\alpha h_{j+1}})(j = 2, \cdots, N-1) \\ \dot{h}_N = -M_0(e^{-\alpha h_{N-1}} - 2e^{-\alpha h_N}) \end{cases} \tag{6.10}$$

ここで $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_N)$ はパルス間距離であり，$M_0 = 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, D\boldsymbol{b} \rangle$ である．実際は系全体の平行移動に関わる式(いわば重心の運動)がこれに加わるが，ここでは省略した．このパルス間距離に関する有限次元縮約ダイナミクスの形は，元々それがどのような方程式から導かれたものであるかということに

無関係である．それらは係数に繰り込まれてしまい，方程式の形は普遍的なものとなっている．いま，$M_0 \geqq 0$ の場合を考えよう．このとき粒子は互いに反発しあう(実際，2 個の場合を考えると，$h_2=+\infty$ として $\dot{h}_1=2M_0(e^{-\alpha h_1})$ よりすぐわかる)．前節で述べた Gray–Scott モデル(6.2)では反発的となることが知られている．

さてこの有限次元ダイナミクスを用いて次の問題を考えよう．パルスが互いに反発的であるとき，時間が経てばどんどん互いの距離は離れていくが，それらは均一に離れていくのであろうか？　実は，離れ方は一様でないことが示される．

定理 6.1　時刻 $t=0$ ですべてのパルス間距離がある値 ℓ より小さいとする．最初にこの ℓ に到達するのは両端の h_1 あるいは h_N のいずれかである(初期値によっては同時のこともある)．　□

これより端に位置するパルスが内部のパルス間距離に比べてより早く離れていくことがわかる．式(6.10)において，$G_j \equiv M_0 e^{-\alpha h_j}$ と変数変換すれば，$\dot{G}_j=(G_{j-1}-2G_j+G_{j+1})G_j$ となり，G_j は正定符号なので，右辺の符号は G_j のラプラシアンの中心差分の形から決まる．これは内部での最大・最小を許容しないので，結局 h_j の最大値は内部ではなく，端で最初に到達されることがわかり，上の結果が導かれる．

さてもう一度，図 6.1 を見よう．分裂の仕方は $1\to2\to4\to8\to16$ という 2^n 列ではなく，$1\to2\to4\to6\to8$ となっている．これは端に位置する粒子のみが分裂し，中にあるものは分裂できないことによる．次節でより詳しく論じるが，分裂するためにはパルス間距離はある値以上にならないといけない．上の定理とこのことを合わせると数値実験で観察された「端」での分裂が自然に導かれる．実際の化学反応実験でもこの理論結果は確認されている([DPRD])．

注意 6.2(振動型テールをもつパルスの相互作用)　テールが単調に減衰する場合は上で述べたように 2 つのパルスの関係は引力か斥力のどちらかしかない．したがって，安定な 2 連パルス(一般に n 連パルス)は存在しない．しかし $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ が複素固有値をもつ場合，パルスのテールは振動的に指数減衰する．このときの相

互作用はちょうど振動テールを極大・極小を交互にもつポテンシャルとみたときのボールの運動のように不安定・安定の2連パルスが交互に出現する．安定な n 連パルスも同様に存在することがわかる(これらについては，たとえば[EMS]を参照)．次節では FitzHugh–Nagumo 方程式(6.11)を例にとり，振動的テールをもつ場合の n 連パルスの存在とその自己崩壊についても触れる．

§6.3　自己複製と自己崩壊

さていよいよ粒子解の**強い相互作用**を考えよう．典型的には2つの安定な1次元粒子パターンをぶつけたときの衝突・散乱現象が直ちに思い浮かぶが，大変形を伴い別の状態へ遷移するという意味で，相手との相互作用なしに自ら崩壊する「自己崩壊パターン」，さらに分裂過程を経て自分自身と同じものを生み出していく「自己複製パターン」をまず取り上げる．これらは内的不安定性がきっかけとなり生じるものであり，衝突のように外因によるものではないが，自分自身による大変形過程という意味で重要なダイナミクスである．衝突ダイナミクスについては後に6.5節で議論する．自己崩壊と自己複製は一見，逆向きのダイナミクスであるが，分岐論的には共通の機構，すなわち**極限点の階層構造**によるものであることがわかる．以下では1次元の場合に限定して話を進めるが，考え方は高次元の場合にも可能なものである．

(a)　自己崩壊

極限点の余韻

神経パルスの伝搬でよく知られている第4章で扱った次の FitzHugh–Nagumo 方程式を考えよう．

$$
(6.11)\qquad \begin{cases} u_t = D_u u_{xx} + u(1-u)(u-a) - v \\ v_t = \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases}
$$

パラメータ a は活性因子 u が外部刺激に応じて，発火するための閾値を決めており，それが大きいほど発火しにくくなる．a を徐々に大きくしていくと，

あるところでパルスは図 6.4(b)のように振舞う．ここではパルスのテールが単調に 0 に減衰するようにパラメータをとってある．しばらくの間，通常のパルスのように進んでいくが，あるところで振幅が急に小さくなり，速度も遅くなる．そして最後は消滅する．これは a の増大と共にパルスの速度が遅くなり，相対的に抑制因子の生成とそれが活性因子に及ぼす影響が速くなり，前方に進もうとする活性因子を押さえ込んでしまうからである．同じ理由で抑制因子の拡散 $D_v v_{xx}$ を導入し，D_v を大きくしていってもパルスの崩壊が同様に起きる．これらの崩壊現象は以下の「極限点の余韻」という分岐論的考察で説明できる．図 6.4(a)に示したように，安定パルスと不安定パルスの枝が a が大きくなると会合し，それより大きい値のところでは伝播するパルス解はない．縦軸はパルスの速度を表す．このような点は**極限点**(あるいはサドル・ノード点もしくはフォールド点)*1 とよばれる．速度の遅いパルスは不安定であるが，その不安定多様体の一部は零解につながっている．極限点そのものは上の方程式を満たす 1 つのパルス解であり，パラメータ値 a がわずかに極限点より大きくなっても，同じ波形はほぼ方程式をみたす．よって

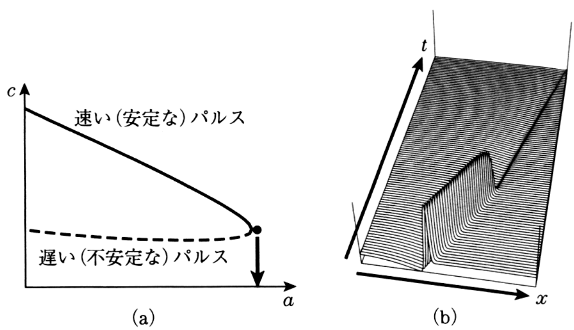


図 6.4　FitzHugh–Nagumo 方程式における単独パルスの自己崩壊．パラメータは $D_u = 0.00001$, $a = 0.272$, $\epsilon = 0.0025$, $\gamma = 0$ を採用した．a は極限点よりわずかに大きい値である．

---

*1　混乱を避けるため，以下ではこのような分岐はサドル・ノード分岐とよび，分岐点そのものは極限点とよぶことにする．

初期値が適当であれば，極限点付近にしばらく留まることになる．これがある一定の間は普通のパルスのように伝播する理由となっている．これを「極限点の余韻」とよぼう．この余韻の後，解がどのように振舞うかは，遅いパルス解の不安定多様体がどこにつながっているかに依存する．つまり不安定多様体のつながり具合の余韻が効いてくる．図6.4(a)の場合，自明な零解に行っているので振幅が小さくなり消滅する道をたどることになる．このようにパラメータが極限点より大きいところでは，もはやパルス解はなく，自明な解しかないのであるが，しばらくの間パルスのように振舞うことは，その裏で隠れた分岐とそれに付随する不安定多様体の連結構造が駆動しているからである．

次々と遷移していくダイナミクスを理解する上でこの**余韻**という見方は重要な役割を果たす．実際，人工的ではあるが次の例を考えよう．

$$\frac{du}{dt} = -(u+1)(u^2-\alpha)(u^2-2u+1-\alpha), \quad |\alpha| < \frac{1}{4} \tag{6.12}$$

平衡点は2つの放物線と直線 $u=-1$ であり，その変化の様子を (α, u) 空間で表示すると図6.5(a)のようになる．安定な平衡点は実線で，不安定なものは点線で表示してある．$u=-1$ は α に無関係に常に安定となる．これはパラメータ α に関するモデル(6.12)の分岐ダイヤグラムとよばれる．特徴的なことはサドル・ノード分岐が2個現れ，かつそれらが1列に並んでいることである．さらに，これは1次元の場合には当たり前であるが，各サドル・ノード分岐の不安定解の不安定多様体(1次元)は1つ上および下の安定解につながっている．いま $\alpha=-0.001$ と固定し，初期値 $U_0=0.5$ から出発すると解は図6.5(b)のように振舞う．

階段の踊り場はすべてサドル・ノード分岐の極限点の値にほぼ等しい．初期点を頂点の近くにとればとるほど，踊り場に滞在する時間は長くなり，観察する時間が短ければ，あたかも平衡点に収束していくかのように見える．しかし十分待てば，次の頂点近くに飛び，再びそこで逗留する．この過程を経て最終的には $u=-1$ という安定平衡点に落ち着く．この軌道は通常点のみを通過しており，あるアトラクターに途中で捕捉されることはない．しか

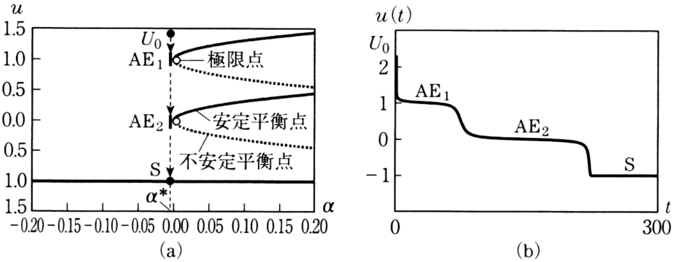


図 6.5 (a) 方程式(6.12)の平衡点がパラメータ α が変わるとき，どのように個数が変化するかを描いたもの．これは分岐ダイアグラムとよばれる．
(b) U_0 から出発した軌道が時間とともにどのように振舞うかを描いた．軌道が平衡解のサドル・ノード分岐点である放物線の頂点近くを通過する際，そこに長くとどまる様子がわかる(AE_1 および AE_2 あたりをみよ)．最後は漸近安定な $u=-1$ に落ち着く．

し，1つの頂点から次の頂点へと飛ぶのは前述の不安定多様体のつながり具合が反映しているわけであり，その意味で階層的極限点の構造の余韻が軌道の振る舞いに現れている．極限点を越えて平衡点が**消えた**ところで初めて頂点から頂点へと飛び移るダイナミクスが生まれることに注意しよう．

競輪解

自己崩壊パターンの興味ある例として，多重パルス解の崩壊過程[*2]がある．前節の注意 6.2 で述べたように振動型テールをもつパルス解は安定な多重パルス解をもつことが知られている．FitzHugh–Nagumo 方程式(6.11)のパルスはパラメータ $(\epsilon,\gamma)=(0.0025,0)$ ととればテールは単調に減衰し，$a=0.272$ では図 6.4(b)のように自己崩壊する．いま $(\epsilon,\gamma)=(0.01,2)$ と変えるとそのテールは単調減衰から振動型減衰に変わる．$a=0.114$ までは初期値を適当にとれば安定な n 連パルス($n=1,2,3$)が存在する(図 6.6 参照)．パラメータ a をさらに大きくして $a=0.0115$ とすると，単調テールのときと同様

*2　これは柳田達雄氏(北海道大学)が数値的に最初に発見したものである．

に自己崩壊を始めるが，それは一気に壊れるのではなく，図6.7のようにまず先頭のパルスがつぶれ，しばらく2連パルスとして進み，再び先頭のパルスがつぶれて，1連パルスとなり最後にそれもつぶれて完全に崩壊する．これも n 連パルスの極限点が階層的に並び，解はそれらの余韻を感じながら崩壊に至ると考えるとすっきりする．実際，3連パルスの場合図6.6のように安定な n 連パルス($n=1,2,3$)の極限点がほぼ同じ場所に位置し，不安定パ

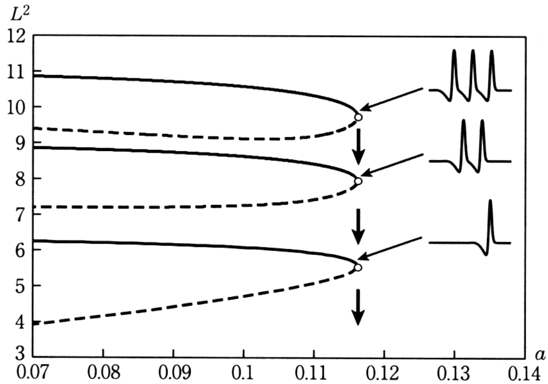


図6.6　振動型テールをもつ3連パルス解の自己崩壊の大域分岐図

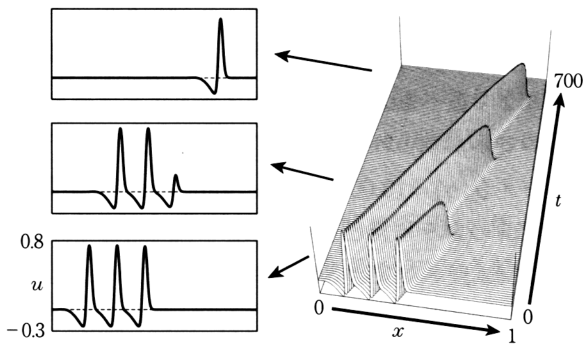


図6.7　振動型テールをもつ3連パルス解の自己崩壊．パラメータ値は $D_u=0.00001$, $\epsilon=0.01$, $\gamma=2.0$, $a=0.115$.

ルスから出る不安定多様体は下の安定連結パルスにつながっていることが確かめられる．自転車競技で先頭を走るものが次々と交代し，後ろへ消えていくことを連想させるのでこの先頭崩壊型多重パルス解を**競輪解**とよんでいる．

空間周期構造の自己崩壊

空間的に局在した粒子解のみならず，空間周期構造も自発的に壊れる．これは後述の時空間カオスの崩壊過程に深くかかわる．図6.8(a)はGray–Scotモデル(6.2)においてコサインの6山(12モード)の波形から出発したときの振る舞いである．多少の変形がすぐにおきるが，しばらく6山の定常状態が続き，やがて定数解へと壊れていく．分岐追跡ソフトウエアのAUTO([DCFKSW])でこのあたりを調べると図6.9のような分岐ダイアグラムが得られる．定数解の枝(P 印の枝)がサドル・ノード構造を成し，そこからsubcritical分岐として生まれた枝(S および U 印の枝)が6山定常解(12モード)の枝である．これも反転してサドル・ノード構造を作っているのがわか

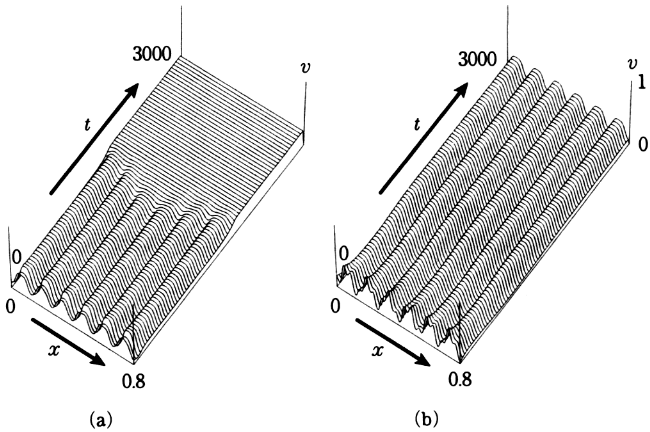


図6.8　(a) 初期値をコサイン12モードにとったときの図6.9のサドル・ノード分岐点および P へとつながる不安定多様体の余韻．コサイン波形がいったん6山解に整形してから P へと崩壊する．(b) 摂動を与えた初期値から出発しても，いったんは6山解に整形し，その後(a)と同様に定数解に崩壊する．(a),(b)ともにパラメータの値は $F=0.040$, $k=0.05772$, $L=0.8$ である．

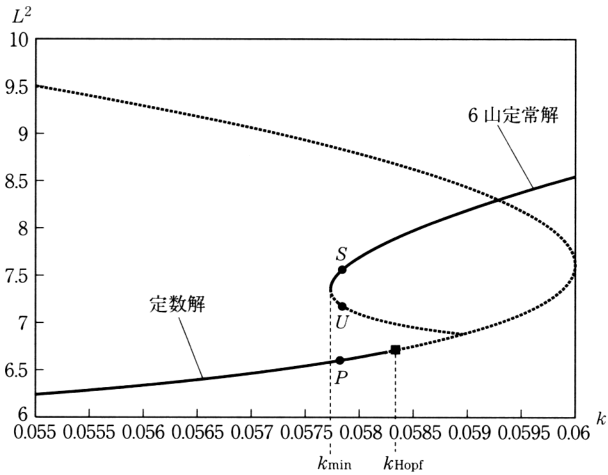


図 6.9 定数解 P から分岐した 6 山定常解の枝がなすサドル・ノード分岐. $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}_{\min}=0.05773408$ より少し小さくとれば, 6 山定常解の P への自己崩壊がおこる. 図 6.8 を見よ.

る. 定数解 P の枝は $k=k_{\mathrm{Hopf}}$ を越えるまでは安定であることに注意しよう. 6 山定常解の枝は P が Hopf 分岐を経て不安定となったところから出ているので, 分岐直後は不安定であり, その不安定多様体は定数解 P の枝につながる. それが極限点 $k=k_{\min}$ まで延長されていることも数値的に確かめられる. この 6 山定常解は極限点 $k=k_{\min}$ で反転した後は安定性を回復する. 図 6.8(a)の振る舞いはパラメータ k を $k_{\min}$ より少し小さくとったときのものである., 最初, 初期値の 6 山コサイン関数が変形するが, それは 6 山定常解へ近付いているのである. 極限点の余韻としてしばらくその状態に留まり, やがて一様状態 P へと崩壊する. 初期波形を多少乱した初期値から出発しても図 6.8(b)のようにいったん 6 山定常解に整形した後, 定数解へ崩壊する(図 6.8(b)では $t=300$ まで, つまり極限点の余韻が続くあたりで計算を打ち切っている. 長時間, たとえば $t=3000$ まで計算すれば(a)と同様に P へ崩壊する). 極限点の 6 山定常解の遷移パターンとしての吸引領域は結構広いことがわかる.

(b)　自己複製パターン

有限区間

自己複製ダイナミクスはGray–Scott モデル(6.2)においても観察され，有限区間におけるその一例は図 6.10 で与えられる．1 山の初期値から出発し

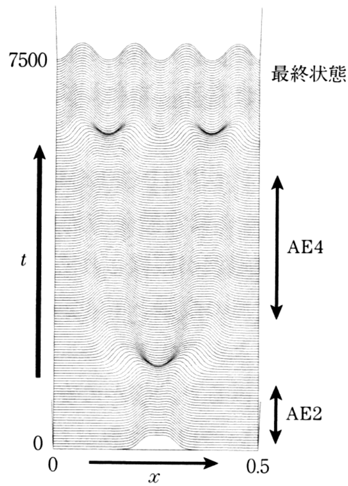


図 6.10　1 山解から分裂を 2 回繰り返して 4 山解へいたる過程．4 山解で分裂が止まるのは境界があるからである．領域が無限に広ければ分裂も永遠に続く．2 山解や 4 山解は領域が無限になるともはや存在しない．それは互いのパルスが斥力的に反発するので，パルス間距離はいくらでも広がるからである．その意味で極限点の階層構造は無限区間では存在しない．しかし分裂がいつ起こるのかは 1 山解(これは無限区間でも存在する)のサドル・ノード分岐点の位置が決定的に重要な役割を果たす．つまりその分岐点のどちらにパラメータがあるかにより分裂がおきるかどうかが決まり，さらに分岐点と考えているパラメータ値との距離が，分裂後どれだけパルス間距離が開けば再び分裂するかを決定しているのである．パラメータ値は $D_u = 2.0\times10^{-5}$, $D_v = 1.0\times10^{-5}$, $F = 0.04$, $k = 0.06075$ である．拡散係数および F の値はとくに断わらない限り，他の図においても共通である．

たパルスは2回の分裂を経て，4山定常解に落ち着く．この自己分裂という不安定性はどのような数理的機構でおこるのであろうか？　ヒントは人工的な例ではあったが図6.5の解の振る舞いが参考になる．仮にいま2つのサドル・ノード分岐の枝がGray–Scottモデルの1山解，2山解の枝に対応しているとしよう．そのときしばらく極限点付近に滞在し，次にジャンプして，2番目の極限点付近に滞在するという動きは自己複製過程における図6.10の動きに似ている．すなわち，しばらく1山解にとどまり，次に中央部分が急激にへこみ始め，分裂し，2山解となり，またしばらくそこにとどまり，分裂を繰り返していく．実際，Gray–Scottモデルにおける1山解，2山解，4山解という枝を分岐解追跡ソフトウエア([DCFKSW])を用いて描いてみると図6.11のようになる．驚くべきことに常微分方程式(6.12)に対応する分岐図と極めて近い．実際，自己複製過程が観察されるのは図6.11の$k=0.06075$のあたりであり，まさしく極限点の余韻と不安定多様体のつながりが，このダイナミクスを駆動していることが見てとれる．不安定な1山解の不安定多様体の行先を数値的に検証してみると，確かに安定な1山解と2山解につながっている．この特徴付けは「いつ自己複製がおきるか？」という疑問に明確に答える．1山パルス解を初期値に与えたとき，パラメータがサドル・ノ

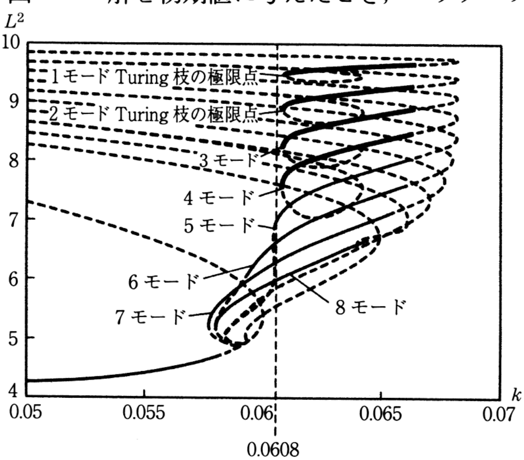


図6.11　図6.10に対応するパラメータkに関する大域分岐ダイアグラム

ード分岐が起きる前ならば，分裂は起きずパルスは安定であるが，サドル・ノード点の左にあれば，自己複製が始まるのである．つまり定常パルス解の大域分岐の様子から判定が可能となる．このような視点は最初に[225]によって与えられた．注意すべきは分裂初期の割れ目の変形は極限点での零固有値に対応する固有関数 ξ が担っているということである．実際それは図 6.12 (b)のような形をとり，これがサドル・ノード点の近くではパルスの変形に深くかかわる．さて有限区間の場合，安定な N 山解が存在するのは「境界」が存在することによる．つまり Neumann 境界条件(反射条件)を課することは鏡映の位置にパルスを置くことと同等であり，互いに斥力で作用するならば均等に配置したパルスは安定になるであろう．したがって 1 山解が上のように不安定化し，分裂を始めても，ある有限回の分裂で止まってしまう．これは混雑効果とでもいうべきものでパルス間距離が詰まりすぎると分裂できなくなる．ではどれだけ離れれば分裂できるのであろうか？　そのためには

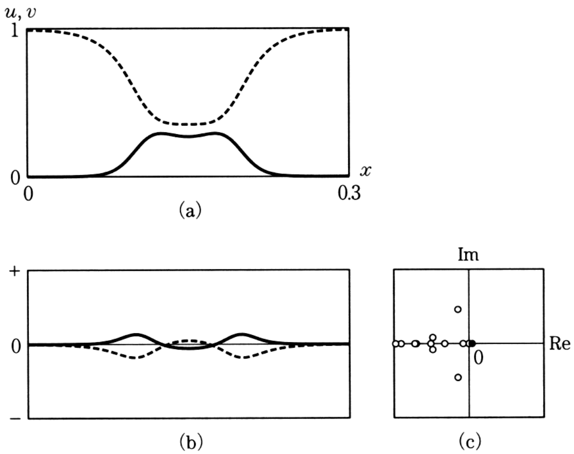


図 6.12　サドル・ノード分岐点近く($k=0.06009$)の 1 山不安定パルス解の形は(a)のようになる．そこで線形化スペクトルを調べると(c)のような分布となり，不安定な実の正固有値が 1 つ存在する．これがサドル・ノード分岐を引き起こすのであるが，これに対応する固有関数 ξ は(b)のような形状であり，これをパルスに加えるとその符号から分裂を促進することがわかる．

境界の影響がない無限区間で考えるのがわかりやすい.

無限区間

無限区間では有限区間と異なり，安定な N 山解($N \geqq 2$)は存在しない．これは粒子ダイナミクスのところで見たように互いに反発的な2つのパルスはある安定な位置関係で落ち着くことはないということからすぐわかる．したがって有限区間のときのように1山解と2山解をつなぐ不安定多様体の余韻という形で分裂を考えることはできない．しかし安定な単独パルスは存在し，それは同様なサドル・ノード構造をもつことが知られている．そして「分裂がいつ起こるのか」という問題に対しては有限区間の場合と同じよう単独パルスのサドル・ノード分岐点の位置により決定される．すなわちパラメータが分岐点の左にくれば，それが分裂の始まりとなる．有限区間との大きな違いは分裂が有限回で止まらず，広がり続けることである．その広がり方は図6.1で見たように端に位置するパルスが分裂する形で進行する．2次元であれば境界に位置するスポットが分裂する(境界分裂)．これらを理解する鍵はパルスやスポットが分裂できるためにはまわりと一定以上の距離が必要なことである．密度が一定以上になると混雑効果で分裂するに十分な資源がまかなえないというのが直感的理由である．1次元の場合にこのことを正確に述べよう．まず前節で論じたパルス間相互作用にパルスの分裂不安定性を取り入れよう．その不安定性はサドル・ノード分岐の不安定固有関数 ξ(図6.12(b))に由来する．

この分裂不安定性を考慮した N 個のパルスの相互作用を調べるため，解を次のような形で近似しよう．目標はパルス間距離と分裂開始がどのように関係しているかを明らかにすることである．

$$\sum_{j=0}^{N}\{P(x-x_j)+r_j\xi(x-x_j)\} \tag{6.13}$$

ここで x_j は各パルスの位置を表し，r_j は割れ目の深さを表すパラメータである．r_j が増大していくときが割れ始めるときに対応する．これを方程式(6.2)に代入し，可解条件を適用してその主要部を取り出すと，次の系が得られる.

$$
(6.14)\qquad
\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -M_0(e^{-\alpha h_2} - 2e^{-\alpha h_1})\\
\dot{h}_j &= -M_0(e^{-\alpha h_{j-1}} - 2e^{-\alpha h_j} + e^{-\alpha h_{j+1}})\\
\dot{h}_N &= -M_0(e^{-\alpha h_{N-1}} - 2e^{-\alpha h_N})\\
\dot{r}_0 &= M_1 r_0^2 - \epsilon M_2 - M_3 e^{-\alpha h_1}\\
\dot{r}_j &= M_1 r_j^2 - \epsilon M_2 - M_3(e^{-\alpha h_{j+1}} + e^{-\alpha h_j})\\
\dot{r}_N &= M_1 r_N^2 - \epsilon M_2 - M_3 e^{-\alpha h_N}
\end{aligned}
$$

簡単のため，系全体の平行移動に関わる方程式は省略した．ϵ は図6.13のようにサドル・ノード点からの(符号付き)距離である．またすべての係数 M_j は正である．パルス間距離 h_j は r_j と分離されているので，それらは4.2節で考察した振る舞いとなる．r_j の方程式をみてみよう．ϵ および h_j の値を固定すると，それは r_j の2次式であり，明らかに図6.14のようになる．r_j が増大するかどうか，すなわち割れ始めるかどうかは，放物線の切片が0以上となるかどうかであり，それはどの h_j が最も大きいかで決まる．右辺の形と4.2節の定理から最初に割れ出すのは両端に位置する h_1 もしくは h_N であることがわかる(**境界分裂**)．これは図6.1の数値実験の結果とも一致する．r_1 または r_N の右辺の切片が0になるという条件から分裂に必要な次の**臨界距離**が定義できる．

$$(6.15)\qquad h_{\text{臨界}} = -\alpha^{-1}\log(|\varepsilon|M_2/M_3)$$

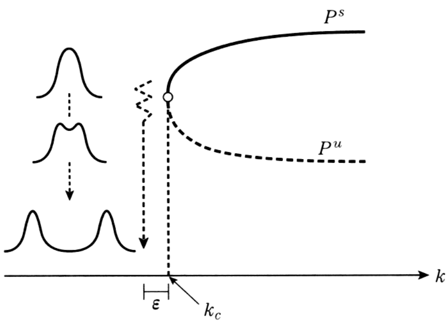
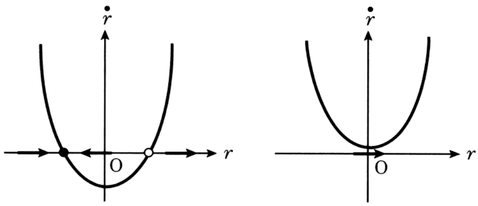


図6.13　パルス解のサドル・ノード分岐と自己複製ダイナミクスのはじまり



(a)　　(b)

図 6.14　パルスのくさび型割れ目の深さ r_j と分裂のはじまり

分岐点に近づけば($\varepsilon \to 0$)，対数のオーダーで臨界距離が長くなることがわかる．より詳しい議論は[ENU], [NIS2]を参照されたい．

§6.4　作っては壊す生成と消滅の循環構造

さていよいよ自分と同じものを次々と生み出す自己複製過程と作られたパターンが壊れる自己崩壊ダイナミクスをうまく組み合わせて，作っては壊し，そしてまた作るというダイナミクスを構成できないかということを考えよう．図 6.3 を見てわかるようにこれは回帰性と深く関わる．つまりいったんは初期状態から大きくはずれるが，しばらくするとほぼ元の状態に戻り，これを何度も繰り返す．有限次元力学系でこの回帰性とカオスの関係はよく調べられている．その代表例として，間欠性と Shil'nikov 写像を述べよう．それらの構造が無限次元の問題にどのように埋め込まれ，またカオスへのスイッチが入るのかを大域分岐の立場から考えていこう．

(a)　回帰性とカオス

回帰性とカオスを考える上で示唆的な有限次元の 2 つの例を考えよう．1 つは 1 次元写像であり，サドル・ノード分岐に関わるものであり，もう 1 つは 3 次元でのフローでサドル・フォーカス型の平衡点に関するものである．どちらも相空間での**大域的回帰性**(reinjection)をもつものである．

間欠性

[0,1] から [0,1] への 1 次元写像

$$y = 0.25 + \epsilon + x^2 \tag{6.16}$$

を考える．直ちに $\epsilon = 0$ を境にサドル・ノード分岐が起こることがわかる．図 6.15(a)のように $\epsilon < 0$ では，どこから出発しても安定平衡点に収束するが，図 6.15(b) $\epsilon = 0.02$ では，サドル・ノード分岐の後，2 つの平衡点が消滅し，軌道は長い時間そのあたりにとどまるが(極限点の余韻)，その後離脱し，右下の枝に移り，その後再び戻ってくる．非常に長い間，元の平衡点付近に滞在するが，「間欠泉」のように突然大きく逸脱するので，これは**間欠性**(intermittency)と呼ばれる．右下の枝は軌道を元のあたりに引き戻す重要な役割を果たしている．臨界状態 $\epsilon = 0$ のとき，ただ 1 つの半安定な平衡点から出た軌道は再び元に戻ってくることに注意しよう．この間欠的動きは周期的ではなくカオス的であることが知られている．

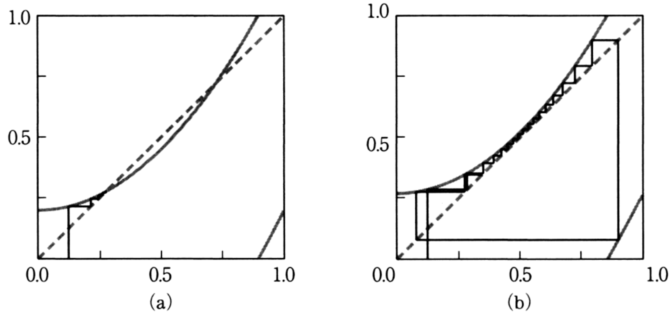


図 6.15　1 次元写像における間欠性

Shil'nikov 分岐

次はレスラーモデルとしてよく知られている常微分方程式系である．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz \end{aligned} \tag{6.17}$$

平衡点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ はあるパラメータ領域でその線形化固有値は1つの正の実固有値と2つの安定複素固有値をもち，サドル・フォーカス型とよばれる．パラメータを $(a,b,c)=(0.38,0.30,4.82)$ のあたりにとると図6.16(a)のように原点から出た不安定多様体は再び原点に巻きつきながら戻ってくる(ホモクリニック軌道)．ここからパラメータを少し変え $(a,b,c)=(0.32,0.30,4.50)$ ととると不安定多様体と安定多様体の横断的交わりが生じ，図6.16(b)のようにカオス的挙動を示す．これはレスラーアトラクターと呼ばれているものである．サドル・フォーカス型の平衡点付近で生じる上のような分岐は最初に考察した人の名前をとって，Shil'nikov 分岐としばしばよばれる．

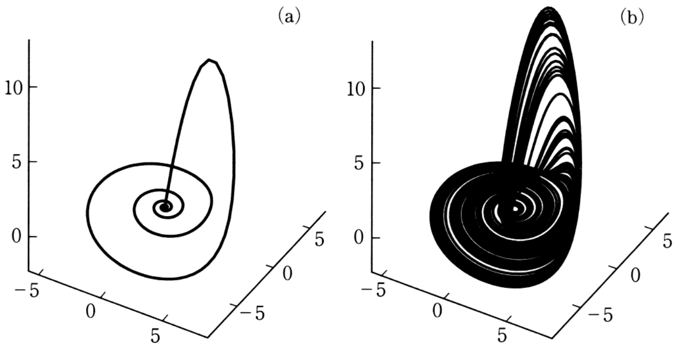


図6.16　レスラーアトラクター

(b)　時空カオス

図6.17で見られる Gray–Scott モデルの空間1次元時空カオスを駆動する機構を考えよう．いま空間 x のある部分区間の「窓」で観察するといくつかの状態を経めぐるサイクルの存在に気付く．それは次のようなものである．

(1)　一様状態 $(1,0)$ において局在した有限サイズのゆらぎが成長し，自己分裂過程を経て周期構造を作る

(2)　しばらく周期構造にとどまる

(3)　周期構造から不安定定数状態 P への崩壊

(4)　P の振動的不安定化と一様状態 $(1,0)$ への非一様な回帰

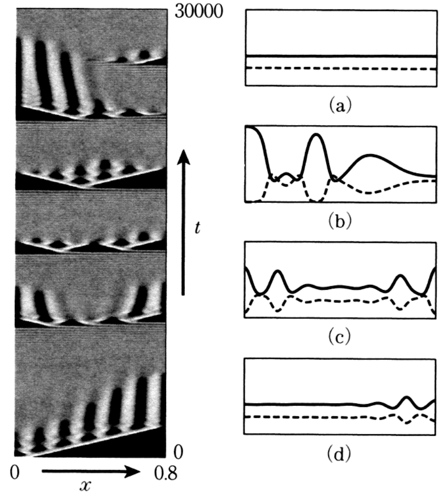


図 6.17 Gray–Scott モデルにおける時空カオスパターンとスナップショット.（ある部分区間の窓から観察すると，ほぼ一様な P 状態から自己複製ダイナミクスを経て，周期構造を作り，それが自己崩壊し，再びほぼ一様な P 状態に戻る様子が見られる．パラメータ値は $D_u = 2\times10^{-5}$, $D_v = 10^{-5}$, $F = 0.035$, $k = 0.05632$ である．

このループを模式的に書いたのが図 6.19 である．第 1 段階は前節で扱った自己複製拡大であり，第 2, 3 段階は前節の図 6.9 の $k_{\min}$ 付近での極限点の余韻とその後の自己崩壊である．第 4 段階の回帰ダイナミクスがうまく働けば，全体としてぐるぐる回り，われわれが期待しているダイナミクスが作れそうである．回帰の際，むろん全域で (1,0) へ戻るという意味ではない(一致してしまえばそこでダイナミクスは止まる)．P の不安定化はすぐ後で見るように振動的であり，位相のズレが (1,0) への非一様な収束をもたらし，結果として (1,0) + 局在摂動に戻るという意味で「非一様」な回帰と書いた．その局在摂動部分から自己複製波が出るので，この (1,0) へ収束しなかった部分はダイナミクスの継続において本質的である．さて平衡点 P の不安定化

であるが，これはパラメータ k を変えれば，空間一様な摂動に対しても，すなわち常微分方程式のレベルで，安定性を失う．実際図6.9を見れば，k が増大するとき $k=k_{\rm Hopf}$ で1対の複素固有値が k の増大と共に虚軸を横切り，Hopf的に不安定化し，常微分方程式の解はその後 P から $(1,0)$ へ漸近する．これに拡散効果が加わればこの波数零の振動的不安定性が長波長領域に広がり，これが $(1,0)$ への振動的な非一様回帰をもたらす．システムサイズはこの長波長領域の不安定性が観察される程度には大きくないといけない．上のサイクルで"不安定"である定数状態 P への崩壊がなぜ生じるのか疑問に思われるかもしれないが，崩壊直前は解は自己複製の結果として作られた周期構造に近く，したがって P の安定多様体に近いことに注意すればよい．

問題はこれら4つのプロセスを途中で止まることなく，続けてぐるぐる回るようにパラメータがとれるかということである．この問題は明らかに相空間における大域的問題である．パラメータ (k,F) をどのようにチューニングすればよいかの判定の際，**分岐解の大域的な配置**とその安定性の変化は決定的役割を果たす．

実際，時空カオスが生じないとき $(F=0.04)$ と生じるとき $(F=0.035)$ における定常解および定数解 P のパラメータ k に関する分岐ダイアグラムは図6.18のようになる．一見この2つは同じように見えるが大きな違いは $k_{\rm min}$ と $k_{\rm Hopf}$ の位置関係にある．図からわかるように $k_{\rm min}$ は定常解の枝のサドル・ノード分岐点の中で最小に位置するもので自己崩壊が起こるかどうかの境目となる．$k_{\rm Hopf}$ は定数解 P の Hopf 分岐点であり，k がそれより大きくなると P は振動的不安定性を呈する．どちらの場合も図6.18の矢印の破線部分では自己複製パターンを，太線部分では自己崩壊ダイナミクスが観察される．しかし(a)では自己崩壊がおこる $k<k_{\rm min}$ に k をとると崩壊後の P は安定であり，軌道は P で止まってしまう．一方 F を小さくとった(b)では $k_{\rm min}>k_{\rm Hopf}$ なので $k_{\rm min}>k>k_{\rm Hopf}$ と k をとれば，そこでは P は不安定なので自己崩壊した後も軌道はそこで止まらず次々と経めぐると考えられる．実際，$k=0.05632$ という値をとれば，解は図6.17のように振舞う．すなわち時空カオスが出るかどうかは，$k_{\rm min}=k_{\rm Hopf}$ をみたす $F=F^c$ が臨界値となる．

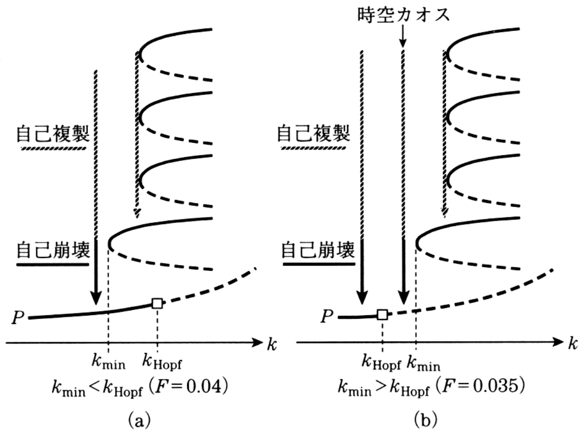


図 6.18 (a) $F=0.04$. $k_{\min} < k_{\mathrm{Hopf}}$ なので自己複製および自己崩壊はおこるが，P は安定なので，その後の時間発展はない. (b) $F=0.035$. $k_{\min} > k_{\mathrm{Hopf}}$ が成り立ち，自己崩壊の後，P が不安定となるパラメータ k をとることができる．そこでは時空カオスが存在する.

より詳しい議論については[NU]を参照されたい.

再度図 6.17 を見れば秩序構造が現れたり消えたりする様子がよくわかる．この空間秩序の変遷の種はどこからきているのであろうか？　実は $k=k_{\min}$ において形式的ではあるが図 6.19 に示したような広義の**ヘテロクリニックサイクル**が形成されていることがわかる．最初に述べた「時空カオスの軌道はどの空間パターンを経めぐっているのか？」という問いに対する答えがこれになっている．このヘテロクリニックサイクルを種として，少しパラメータをずらすと時空カオスが得られる．これは前節で紹介した有限次元における間欠性や Shil'nikov 分岐によるカオスの出現と共通するものがある．しかしここで述べた時空カオスはその**出現点**(onset)付近において低次元カオス系に縮約されるというものではなく，大域的な解構造を踏まえてはじめて特徴付け可能なものである.

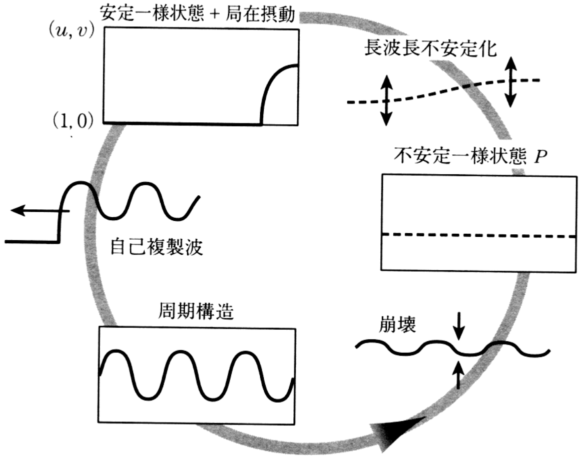


図 6.19 $k=k_{\min}$ では形式的に定常空間周期解，不安定定数解 P，安定定数解 $(u,v)=(1,0)$ をめぐる広義のヘテロクリニックサイクルを構成できる．実際の有限区間で観察される時空カオスでは P から $(1,0)$ へ移るとき，区間全体で一様に行くのではなく(真に $(1,0)$ へ落ちればそこから軌道は出れない)，必ずそこから自己複製波が生み出される $(1,0)$ 以外の部分が残っている．実際，上のサイクルはある部分区間に着目すれば観察できる．図 6.17 を見よ．

§6.5 粒子解の衝突ダイナミクス

これまでは粒子パターン自身による不安定性，とくに分裂や崩壊について考察してきた．この節では粒子パターンそのものは安定であるが，他の粒子パターンとの衝突を考える．いわば散逸系における散乱実験の解析である．とくに入出力関係を正確に記述し，さらに散乱結果の予測についても考える．散逸系の粒子散乱の特徴は，同じ方程式の解であってもパラメータの値が変わると，粒子パターンの速度が変わるのみならず，弾性的に反射したり，対消滅したり，あるいは複数の粒子に分裂したりと実に多様であることである(たとえば[KM], [KAMI], [NTU1], [NTU2], [NTU3]を参照)．また時間的に周期変動する進行パルス(脈動解)の衝突においては，その出力が衝突時の

位相に依存することも知られている([TUN1])．とくに2次元や3次元では，ぶつかる角度により局在状態に落ち込んだり[LMABP](分子形成)，衝突後，解のトポロジーが変わってしまう場合もあり，一筋縄ではない．これまでと同様に解の大変形を逐一記述することは極めて困難である．また複製や崩壊のように自分自身の解の不安定化をもたらす分岐構造が存在するわけでもない．ここでのアイデアは**分水嶺解**(scattor)*3から衝突現象を見ようというものである([NTU1]および[NTU2]参照)．この解は一般に広いパラメータ領域で存在しているが，不安定度が高く，発展方程式を解いて解を見ていても普通は表に出てこない．しかし散乱の入出力関係がパラメータと共に変化する遷移点——たとえば反射から対消滅へ——においては，それは顔を出す．言い替えれば軌道は分水嶺解の安定多様体に沿ってそれに近づき，やがて離れる．一般には不安定次元が1とは限らないので，分水嶺解に近づく解軌道の探索はその次元に応じた広いパラメータ空間で行う必要がある．これはたとえ空間1次元の問題でも容易ではなく，それがこの観点から散乱を見るという発想を生まなかったのであろう．この分水嶺解の近くのダイナミクスを調べると，衝突後この近くに来た軌道がどのように振り分けられ，その結果どのような入出力関係をもたらすかが予測できる．さらに特異摂動法などを用いて分水嶺解を厳密に構成することも可能となる．現時点ではすべての分水嶺解を理論的に求めることは困難であるが、6.1節で述べた構造探索型数値アプローチによりどのような枠組で考え，なにが厳密に示し得るかの指針を得ることができる．以下ではまず空間1次元 Gray–Scott モデルの反射・対消滅の遷移点の分水嶺解について述べる．

(a) 分水嶺解——不安定解から見る衝突過程

Gray–Scott モデルの定常パルス(速度 $c=0$)は互いに反発することは前節で確認したが，これから直ちに速度が遅いパルス同士も反射することが想像される．これは荒っぽく言えば，速度が遅ければパルスのもっている「慣性

*3 用語としては separator も可能であるが，不安定次元が高い場合や散乱(scattering)に関連して出現する解であるので，“scattor” というよび方をここでは用いる．

力」(運動エネルギー)が小さく，反発力というポテンシャルエネルギーの壁を越えられないであろうという直感に基づく．実際，そのときの解の形は対称形に近く，互いに近づきあうときも，パルス本体が接触する前に反発して向きを変えてしまう([EMN])．しかしパルス速度が速くなると，同じ反射であっても衝突時には合体し大変形の後，反射する．さらにある速度以上になると**対消滅**するようになる．実際，Gray–Scott モデル(6.2)ではパラメータ k を小さくすると速度が速くなり，ある $k=k_c$ で反射から対消滅へと振る舞いが変わる．この遷移点 k_c 前後でのパルスの振る舞いは図6.20にあるように，激しくぶつかり原形をとどめないまで変形し，$k>k_c$ ならば向きを変えたパルスに整形し，$k<k_c$ ならば消えてしまう．このような大変形を伴う衝突・散乱過程をどのような見方で考えればよいであろうか？　変形の逐一の過程を追うことは難しく，摂動的方法も有効ではない．1つのアイデアは反射か対消滅かを制御する不安定解に着目することにある．図6.20を注意して見れば，最終変形の直前は極めて似た形——2本の角が生えた対称形——をとることがわかる．実際，解はこのあたりで逡巡するかのように動きがゆっくりとなる．ここから勢いを盛り返せるかどうかが反射と消滅の境目となる．あたかも分水嶺の役割をこの遷移状態は担っているように見える．実際，数値的に Newton 法でこの遷移状態に非常に近い形の定常解をみつけることができる．図6.20(C)(a)がそれである．この分水嶺解を**双角解**とよぶことにしよう．これはむろん不安定であり，線形化スペクトルを計算すると，平行移動に付随する零固有値(図6.20(C)(e))以外に，不安定実固有値が3つ存在し，対応する固有関数を実部の大きい順に上から並べると図6.20(C)のようになる．いまは左右対称の衝突を考えているので，考える不安定固有関数も左右対称のもの，とくに(c)が重要となる．実際(c)の固有関数方向に沿って微小な正および負の摂動を分水嶺解に加えると，正のときは2つのパルスが対で現れ，負のときは消滅する．これは分水嶺解とよばれるにふさわしい．したがってこの分水嶺解の近傍のダイナミクスを調べ，軌道がどのように入ってくるかをみれば，基本的にその後の振る舞い——反射か対消滅か——の判定が可能となる(詳細は[NTU1]を参照)．

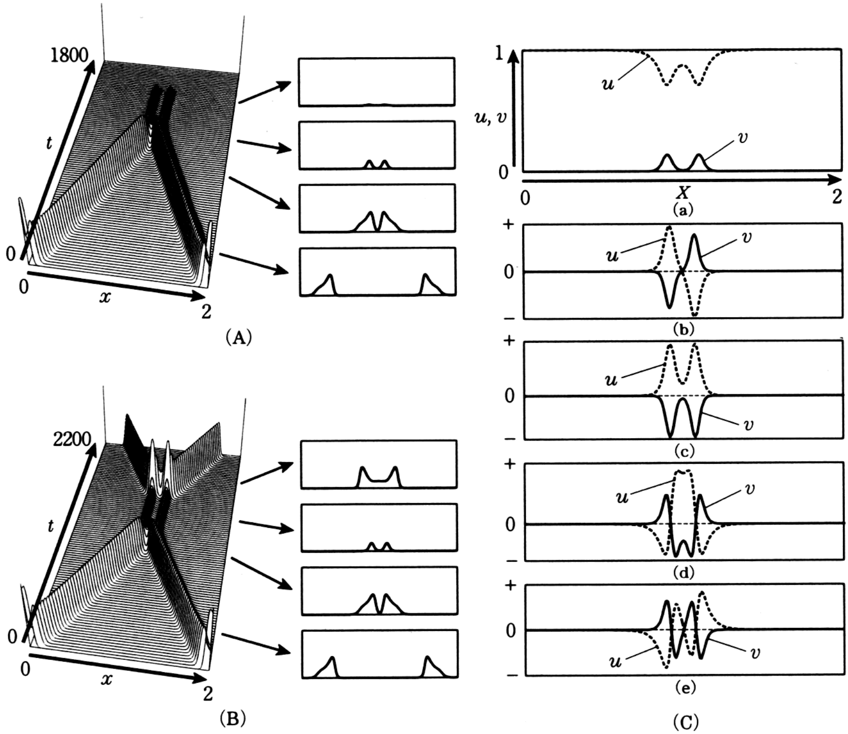


図 6.20　反射と消滅の分水嶺解(双角解)およびその固有関数．対消滅(A)から反射(B)へとパラメータ k により入出力関係が変わる．どちらの場合も大変形の後，2 本の角をもつ双角解に近づく．双角解(C)(a)における線形化スペクトルを計算すると，平行移動から来る零固有値(C)(e)以外に 3 つの不安定固有値が存在し，とくに対称衝突では 2 番目の(C)(c)の不安定方向が対消滅か反射かの仕分けに重要な役割を果たす．

(b)　分水嶺解ネットワークを経巡る散乱過程

2 番目の例としてガス放電系の定性的なモデルである 3 種反応拡散系([BLSP1], [SOBP])をとりあげ，そこでの散乱現象における多段の遷移過程が分水嶺解の観点からどのように理解されるかを述べよう．このモデルでは，2 次元および 3 次元進行スポット解の存在が数値的に知られており，空間高次元での散乱実験を行うのに都合がよい．

$$(6.18)\qquad \begin{cases} u_t = D_u\Delta u + 2u - u^3 - \kappa_3 v - \kappa_4 w + \kappa_1 \\ \tau v_t = D_v\Delta v + u - v \\ \theta w_t = D_w\Delta w + u - w \end{cases}$$

図6.21(A)では，τ を分岐パラメータとして，空間1次元における定常パルス解の分岐図と，散乱の典型的な入出力関係を示している．定常パルス解から進行パルス解へのドリフト分岐は，超臨界的に $\tau^d \approx 9.7$ で起こる．この分岐点近くでのパルス間相互作用は反発的なため，図6.21(A)(下段左)のように散乱する．しかしながら τ を大きくすると，2つのパルス解(反射)から1つのパルス解の発射(合体)へと，$\tau^s \approx 16.1328079$ で入出力関係が変化する．前の例と異なるのは，ここでは2つの分水嶺解が1つの散乱過程のなかで引き続いて現われる点である．1つはGray–Scottモデルの場合とよく似た，余次元3の双角型定常パルス解(双角解)であり，もう一方は不安定度1の単角型定常パルス解(**単角解**)である．τ が τ^s より微かにでも小さいと，解軌道はいったん，双角解に近付いた後，中央部分がくびれ，2つのパルス解に分裂した後，やって来た方向へ帰っていく．一方，τ が τ^s より微かにでも大きいと，軌道は初めは双角解に近付き，それから2つの角の凹みの部分が盛り上がり，単角解に近付いていく(図6.21(B)(a)の拡大図を見よ)．しかしながら，この単角解は，$\tau > \tau^d$ でドリフト不安定なので，しばらく留まったのちに，左右どちらかへと動き出すことになる．これら2つの分水嶺解を次々と，まるでオリエンテーリングでのチェックポイントのように，解軌道は通過していく．双角解は，3つの不安定固有値をもつが($\lambda_1 = 0.9069 > \lambda_2 = 0.1297 > \lambda_3 = 0.0138$)，そのなかの1つが飛び抜けて大きく，この不安定性が最終的にダイナミクスを支配する．この λ_1 に対応する不安定モードの形は，左右対称形で中心にピークがある．これが双角解から，単角解への変形を促している．さらに τ を増加しても，しばらくの間は入出力関係は変化していないように見える．しかしながら，散乱途中のダイナミクスは時間周期運動を示す．これは単角解が $\tau \approx 31.8$ で，超臨界的にHopf分岐をおこし，定常解だったものが，時間周期解に変化したことを示している．この周期的

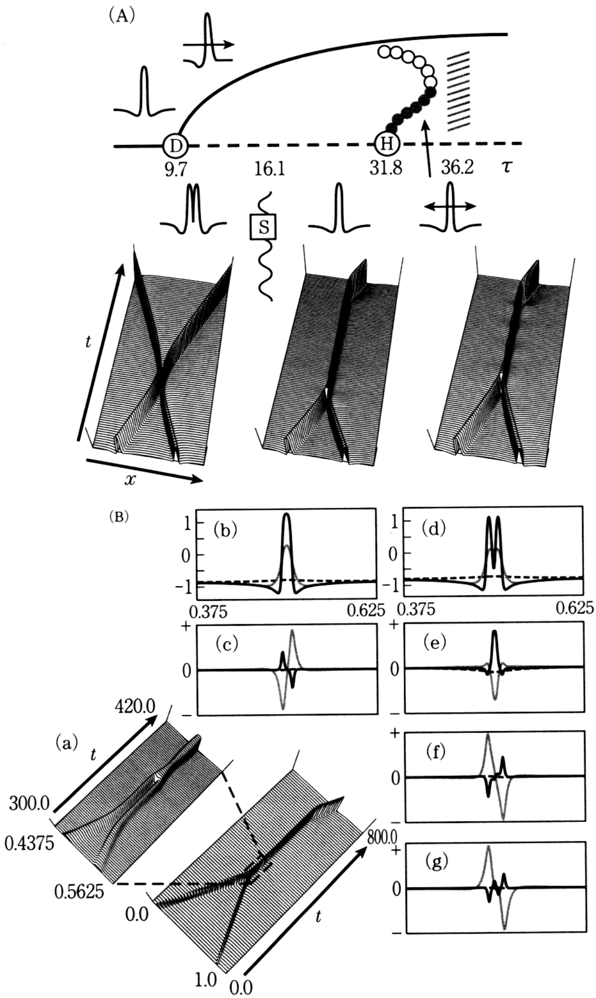


図 6.21 (A) ガス放電 3 種系(6.18)における相図. 下段は散乱の様子(左: $\tau=15.0$, 中: $\tau=20.0$, 右: $\tau=35.0$). (B) (a) τ が微かに τ^s より大きいとき, 双角解から単角解へと 2 つの分水嶺解を経て, 最終的に右方向の進行パルス解となる. (b), (c) 単角解とその不安定モード. (d), (e)-(g) 双角解とその 3 つの不安定モード. 図中, 実線(灰線, および破線)は u(v, および w)成分を表す.

分水嶺解はドリフト不安定性を依然としてもっていることに注意しよう．解軌道は，いったん，この単角周期解に留まったのち，微かな揺らぎからドリフト不安定をおこし，左あるいは右のどちらかにパルスは動き出すことになる(図6.21(A)(下段右))．このように衝突後，不安定度の高い分水嶺解から，低いものへと解軌道が変遷していく．このことを図式的に描くと図6.22のようになる．

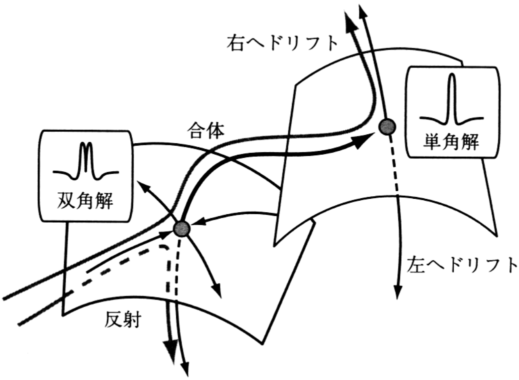


図6.22　双角解から単角解へのヘテロクリニック結合．双角解および単角解のそれぞれの安定多様体およびそれらの間のヘテロクリニック結合が反射か合体か，あるいは左右どちらへドリフトしていくかを決めている．

同じように，2つの分水嶺解が出現する散乱現象が，空間2次元における進行スポット解同士の正面衝突実験においても見つかっている．τが十分に小さいときは，動かない円盤型スポット解が安定である．τを大きくすると，$\tau \approx 28.9$で不安定化してある一定方向に等速度で動き出すことからこの点はドリフト分岐点であることがわかる(進行スポット解は，$\tau \approx 94.0$まで安定である．図6.23参照)．ドリフト分岐点近傍では，2つの進行スポット解は反射する．空間1次元と同じようにτを分岐パラメータとして大きくしていくと，その振る舞いは反射から，合体し1つの進行スポット解へと出力は変化する．図6.24(A)は，反射-合体の境目の$\tau^s \approx 69.5$より微かに大きいτ

値での散乱実験の様子である．解軌道はまず，瓢箪型の不安定定常解(**瓢箪解**: 図 6.24(A)左下)に近付き，そして円盤型の不安定定常解(円盤解: 図 6.24(A)右上)となる．しばらくの円盤解に留まったのち，上下左右いずれかの方向へ動き出し，もとの進行スポット解となる．一方，τ が τ^s より微か

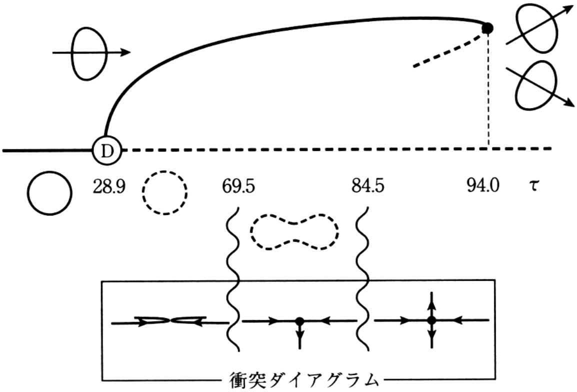


図 6.23　スポット解の τ に関する分岐ダイアグラム

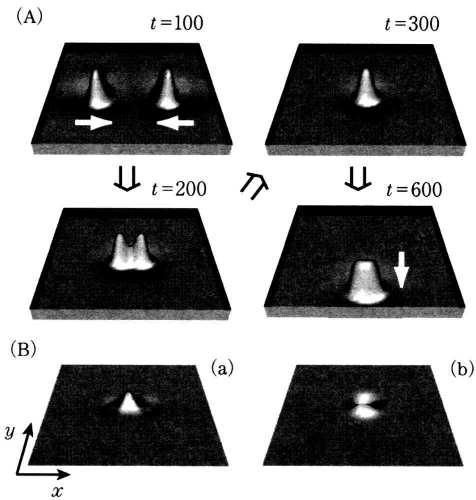


図 6.24　(A) 進行スポット解の散乱過程 (u 成分のみ表示している).
(B) (a)瓢箪解 (b)円盤解について，その最不安定モード固有関数 ϕ_1 の形状.

でも小さいならば，2つのスポットは瓢箪解に近付いたのち，それぞれお互いにやってきた方角へ帰っていく．

実際に定常解に近い解(たとえば，図6.24(A)，$t=200$ と $t=300$)を第一近似として，Newton 法を用いて，それぞれの分水嶺解を具体的に得ることができる．瓢箪解は零固有値の他に，5つの不安定固有値をもつ．なかでも，最大不安定固有値($\lambda_1=0.6275$)が他に比べて桁1つ大きく，瓢箪解まわりの解軌道を支配する．この軸対称な不安定固有関数 ϕ_1(図6.24(B)(a))は，瓢箪解の“くびれ”を持ち上げる，あるいは切り離すのに具合がよい形をしている．一方，円盤解については，2つの不安定固有値と2つの零固有値が存在する．この2つの不安定固有値($\lambda_1=\lambda_2=0.0921$)に対応する不安定モード(図6.24(B)(b))は，それぞれの軸について同じプロファイルをもっている．これらは，それぞれの方向へのドリフト不安定性を示唆している．

空間高次元では，1次元と異なり正面衝突は稀であり，通常は斜め衝突である．その解析は今後の課題として残っている．しかしながら，空間パターンの個数やパターンのトポロジー変化といった定性的性質の変化は縮退した正面衝突において最も典型的に顕現すると考えられる．つまり，質的に全く新しい状態へ至ることができるのは，そのような稀なイベントを通して起こると考えられる．高次元衝突ダイナミクスの詳細については[NTU2]，[NTU3]を参照されたい．

§6.6　不安定秩序解ネットワークが駆動する遷移ダイナミクス

自己複製，自己崩壊，衝突ダイナミクスのいずれにおいても，不安定解の存在とそのつながりが重要な役割を果たしていた．最初の2つでは，サドル・ノード分岐点の階層構造，とりわけその不安定多様体による連結構造が，軌道の時間発展を決定づけていた．衝突問題においても衝突時に解は一般に大変形するが，それがどのような道筋をたどるかは時間発展を見ていてもよくわからない．しかしながら一般に系に含まれる時定数や制御パラメータを

変化させると，衝突後の出力が定性的に変化するところがあり，その遷移点付近の軌道の振る舞いを詳しく調べると，軌道はいくつかの不安定秩序解の近くを通過後，パラメータに応じてある特定の不安定多様体に沿って振る舞いを決定していることが判明する．たとえば最も対称性の高い正面衝突においては，図6.22のように双角解(1次元)あるいは瓢箪解(2次元)から単角解(1次元)あるいは円盤解(2次元)への連結が数値的に確認され，大変形の骨組みはこの連結に沿った形で軌道が時間発展してゆくことと理解される．パラメータが遷移点から離れると，軌道はこの骨組みから離れるため，対応する変形過程はもっとぼやけたものとなり，これらの連結構造は隠れた構造となる．

このように大変形を伴う遷移過程を理解する上で，**不安定秩序解の成すネットワーク構造**は重要な役割を果たしている．この観点の有効性はパターンの変形を伴うさまざまなダイナミクスに広がりを見せている．たとえばあるクラスの不均一媒質を伝播する粒子解の運動においては，不均一性により媒質に不安定なディフェクト解とよばれる空間非一様解が生じ，不均一場でのさまざまなダイナミクスは粒子解とそれらとの衝突ダイナミクスの結果とみなすことが可能となる．これによりディフェクト解の存在や安定性および分岐構造が不均一場ダイナミクスの理解において重要となる．これらの詳しい内容は文献[NTYU1], [YTU1], [NOU1], [TNNUU]を参照されたい．また二相対流における空間局在対流セルの衝突問題においても上の視点の有効性は確かめられている([IN1], [IN2])．

最後に与えられた問題に応じて，鍵となる不安定解の集合はどのように決定できるのであろうか．1つは上で述べたように，解の振る舞いが定性的に変化する遷移点付近での発展方程式を注意深く解くことにより，その候補となる近似解が得られる場合があり，それを元にNewton法などにより，不安定解を捕まえることができる．しかしながらこの方法は最初の近似解を得る段階で発展方程式を精密に解くことに依存しており，その近似の度合いの定量的評価は一般に難しく，かつそこでのNewton法が必ずしも収束するとは限らない．より組織的な方法はよく知られた秩序解，たとえば円盤解から出

発し，適当な制御パラメータを動かすことにより多彩な解を大域分岐追跡の結果として得ることである．サドル・ノード分岐点，対称性破壊分岐点，Hopf 分岐点などを経て不安定解も含めた解の族がこれにより得られる．同時に不安定固有値の分布も決定されるので，各不安定解からの不安定多様体の挙動についても一定の情報が得られる．一方でこの方法による計算コストは空間2次元以上では高くなる．今後は以上の方法も含め，より統合的な手法が開発されてゆくと期待される．

付録 A 計算ホモロジーによる形態同定

3 次元周期構造を成すものは自然界に遍在する．4.2 節に述べた共重合ポリマー系と同様に，たとえば水中の脂質や界面活性剤などの両親媒性分子は，疎水基と水分子が接触を避けるようにミクロ相分離界面を自発的に形成し，空間を 2 つの無限に連結した共連続な部分空間($X^{\pm}$)に分割する．この界面構造は数学的によく知られた空間 3 次元周期極小界面を自発的に形成し，ジャイロイド(Gyroid)，ダイヤモンド(Diamond)，プリミティブ(Primitive)とよばれる共連続立方相が観察される*1．これら非相溶性により生じる 3 次元相分離構造のなかで，2 本のジャイロイドネットワークがお互いの懐をかいくぐるように編み上げたものはダブルジャイロイド構造とよばれ，これが界面形成によるエネルギーの損失分を，周期的極小曲面のなかで最小にできることが数値的にも検証可能となってきた(たとえば[TN1])．実験的にも，医療で用いられる CT(computerized tomography)スキャンの技術を応用した 3 次元電子顕微鏡法によって，ナノメートル(nm)オーダーの構造を 3 次元的に高分解能で観察することができるようになり，共重合ポリマー系の共連続相はダブルジャイロイドであることが決定的となった．従来の透過型電子顕微鏡では，試料を透過した電子の強弱から得られる画像は深さ方向の情報を失った 2 次元的なもので，ダブルジャイロイドのような複雑な構造の解明には不向きであった．しかし近年の 3 次元電子顕微鏡法では，試料を ±60° 程度の範囲のさまざまな方向から撮影し，得られた平面透過画像を積み重ねて

*1　以下，G, D, P と略記する．

3 次元画像を構成できるようになった．しかしながら 3 次元空間における形態同定問題は周期的という条件をつけても一般に容易な問題ではない．より複雑な形状が遷移的に出現する場合はなおさらである．視覚に頼らない信頼できる形態判別法はあるだろうか．この付録では計算ホモロジーという位相的手法を以下で簡単に紹介しよう．

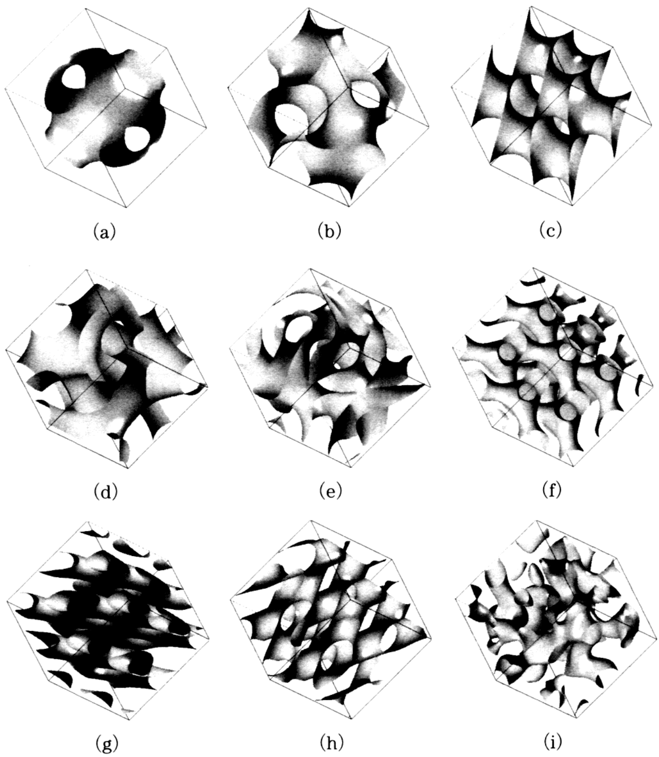
最も古典的でよく知られている代数的位相不変量は Euler 数 χ であろう．オイラー数は複雑なデータに対する単純だが有用な測定量であり，位相空間 X の構造を連続変形しても変わらない．その変化は系のトポロジーが根本的に変わることを意味する．Euler–Poincaré の定理より，Euler 数は Betti 数の交代和

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\beta_i(X)$$

であることから，Betti 数の方が，より情報量の多い位相不変量であることを示している．計算ホモロジープロジェクト(CHomP)を展開する Mischaikow らのグループ([KMM])は物質科学から生命科学までの応用を視野において，新たな非侵襲的トポロジー測定法の有用性を提案している．実際，Betti 数を用いれば，図 A. 1 にあげるようなさまざまの共連続界面構造について，表 A. 1 のように区別して表すことができる．ただし，基本格子構造について Betti 数を計算した．ドメインや穴の数に対応する Betti 数は，考慮する周期の数によって変化することに注意しよう．閉曲面の三角形分割についての Gauss–Bonnet の定理より，Euler 数は考慮する領域の大きさに依存するので，上述の Euler–Poincaré の公式より任意の周期数についての Betti 数を得ることは可能である．また Betti 数によって，すべての空間 3 次元構造を分類して表すことはできないことにも注意しよう．たとえば，図 A. 1(i)のように，ダブルダイヤモンドと同じ $\beta_i(X^+) = (2, 18, 0, 0), \beta_i(X^-) = (1, 18, 1, 0)$ を示す規則性のないランダムドメイン構造も無数に存在する．

以上の点に注意を払えば，Betti 数による空間 3 次元構造の分類は非常に有効な手段になる．それは単に最終形態の判定だけではなく，遷移的に現れる形状についても有益な情報を与えてくれる．例として，4. 2 節の共重合

ポリマー系に対するモデル方程式(4.19)の数値シミュレーションで再現した形態転移におけるトポロジー変化をあげておく(詳細は[TN2]参照). 図A.2は，層状ドメインが2枚並んだレイヤー構造を初期条件として，系のパラメ

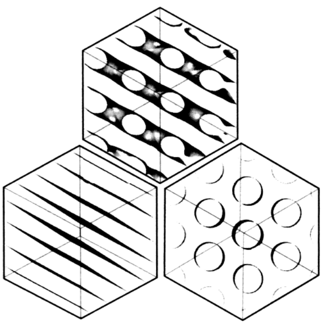


図A.1　ソフトマターにおける共連続界面構造.（上段）シングルネットワーク構造,（a）プリミティブ，SP,（b）ジャイロイド，SG,（c）ダイヤモンド，SD.（中段）ダブルネットワーク構造,（d）ダブルプリミティブ，DP,（e）ダブルジャイロイド，DG,（f）ダブルダイヤモンド，DD.（下段）(g) 穴あきレイヤー構造.（h）空間群 Fddd のメッシュネットワーク構造. Betti 数は $\beta_i(X^{\pm})=(1,13,0,0)$ である.（i）ダブルダイヤモンドと同じ Betti 数を示すランダムドメイン構造.

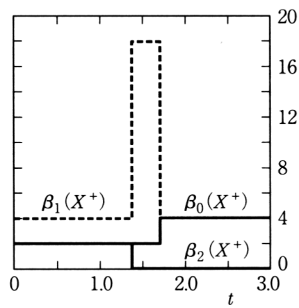
ータを変化させたときに得られる構造相転移について，その Betti 数の変化を示したものである．レイヤー → ヘキサゴン転移において，その途中に遷移的ではあるが，明確にある形状に鞍点として留まることが(b)の時系列データよりわかる．それが穴あきレイヤー構造であることは，その Betti 数による評価で同定することが可能である．数学的には古典であるさまざまな位相不変量が新たな数理的測定法として，材料科学，生命科学，医療に今後幅広く応用されていくことが期待されている(寺本らによる講義録[TG]参照)．

表 A.1 ソフトマターにおける共連続構造の Betti 数と空間群．シングルネットワーク構造ではドメイン X^+ とマトリックス X^- について対称だが，ダブルネットワーク構造にはあてはまらないことに注意せよ．空間群の記号 I, P, F はそれぞれ体心，単純，面心の立方晶系の Bravais 格子であることを示す．

	シングルネットワーク			ダブルネットワーク		
	$\beta_i(X^+)$	$\beta_i(X^-)$	空間群	$\beta_i(X^+)$	$\beta_i(X^-)$	空間群
P	(1, 3, 0, 0)	(1, 3, 0, 0)	Pm3m	(2, 6, 0, 0)	(1, 6, 1, 0)	Im3m
G	(1, 5, 0, 0)	(1, 5, 0, 0)	$I4_132$	(2, 10, 0, 0)	(1, 10, 1, 0)	$Ia\bar{3}d$
D	(1, 9, 0, 0)	(1, 9, 0, 0)	Fd3m	(2, 18, 0, 0)	(1, 18, 1, 0)	Pn3m



(a)



(b)

図 A.2 ミクロ相分離モデルの数値シミュレーションによるモルフォロジー間転移での Betti 数の変化．レイヤー → ヘキサゴン転移．層状ドメインに穴が等間隔にあいた穴あきレイヤー構造を経て，ヘキサゴン構造にいたる．穴あきレイヤー構造の Betti 数は $\beta_i(X^+) = (2,18,0,0)$ と $\beta_i(X^-) = (1,19,2,0)$ であるので，層状ドメイン1枚あたりに8個の穴があいている．

今後の方向と課題

パターン形成に関わる数学は多岐にわたり，他の諸科学との関連も深い．第 4 章で述べた渦巻波においても化学実験，モデリング，数値実験，そして枠組みとして取り出された定性的理論という流れがあり，同時にそれらの間のフィードバックがある．これらの有機的結合をいうのはやさしいが，現実はどの一つをとっても大変である．一人ですべてはやれないとしてもこのマルチファセット的性格を無視してはやっていけないだろう．以下ではこれらにまつわるいくつかの私見をやや広い観点から述べさせて頂き，ご批判を乞いたいと思う．

第一原理と現象論

本書で取り扱ったモデル方程式はほとんどが現象論モデルである．その意味において流体現象における Navier–Stokes 方程式とは性格が異なる．実際，神経モデル方程式として Hodgkin–Huxley 方程式(その簡略版が第 4 章で現れた FitzHugh–Nagumo モデルである)があるが，その導出はいくつかの実験および生物物理学的考察に基づく．しかし同時に多くの経験的および定性的側面がある．

これは Navier–Stokes 方程式のように流体に関する基本的仮定(第一原理)から出発して少数のパラメータを含む方程式が一意的に導かれる場合と大きな違いである．Hodgkin–Huxley 方程式の場合にその精密化を計るとすれば，より詳しいデータに基づき，より多くのパラメータフィッティングを行う必要が出てくる．しかし明らかにこの方向はいたずらにモデルの複雑化を引き起こし，かつコストがかかるものとなる．いわば，華麗に歩んでいたムカデが「どうしてそのように多くの足をうまくあやつれるのですか？」と急に聞かれて歩けなくなる状況に似ている．

詳細にあまりこだわり過ぎると本質が見えなくなる．一方で階層化し，複雑化した巨大システムを数学の立場から本質的な定性的モデルを提出していくことはますます強く要求されるし，そのような時代にすでにはいってきているといえる．ファイナンスや巨大ネットワークのダイナミクスに数学は不可欠である．どのようにして高い信頼性のある定性的モデルを築き上げていくことが可能であろうか．即効薬はむろんないが，一つは本書で述べたスケールの違いを利用して，粗視化してダイナミクスを見る方法であろう．そして各スケールで得られたものを階層的に組み合せたり，さらにそれらの間の相互作用を考えるのも興味深い．また第6章で述べた自己複製モデルやカオス理論が示唆するように，単純な原理やモデルでも十分に複雑なダイナミックをもち得るし，またある程度までは理論予測もできる．実際，Sierpinsky ガスケット構造も最近，反応拡散系の時空パターンとして再現できることがわかっている(文献[123])．（ここでの Navier–Stokes 方程式と Hodgkin–Huxley 方程式の対比は John Guckenheimer の書いた論説 (AMS Notice **45**(9)1998) による．併せて読まれることをお勧めする．)

物からダイナミズムへ

遺伝子解析は本書の立場とはまったく反対の極にある科学と思われるかもしれないが，そうでもないようである．近藤らによる仕事[172]は現象論モデル(第4章で述べた Turing モデル)が魚の表皮パターンの形と成長を高い精度で予測できるという意味で注目を集めた．用心深い研究者であれば「似て非なるもの」といいそうなところを積極的に逆手をとった感がある．さらに一歩進めて最近はある特定の遺伝子とモデルのパラメータの役割を対応付けようと試みている．遺伝子操作とモデルのパラメータ操作を同一視しようというわけである．

これはなにを意味するのであろうか．実体からもっとも遠い，あるいはそうであるからこそ単純な定性的モデルがマクロなダイナミクスを説明できるというのは大いにあり得ることである．遺伝子をはじめ，最終的な物をつきとめることが近代科学の一つの使命となっているが，同時にそれはダイナミ

クスの視点を失うことになった．物はダイナミクスのきっかけを与えるがダイナミクスそのものではない．抽象的ではあっても現象論モデルはそのダイナミクスを理解するヒントを与えてくれる．

局所と大域

局所と大域の問題は非線形系に普遍的に現れる．くり込み群の考えも，局所的情報からいかに大域的情報を引き出すかに関わっていた．また単独ではなくシステムに多彩なパターンが現れるのは，局所性と大域性が共存し，それらが相互作用するからである．第4章でTuring不安定性と定在波の存在を述べたが，そのとき抑制因子は活性因子より速く拡散する必要があった．これは抑制因子がすばやくひろがり，空間方向に大域的な抑制場を作り，活性因子の運動をブロックするので，安定な定在解が出現できるのである．

また方程式の解構造，とりわけパラメータ依存する大域的な分岐構造は局所と大域がなんらかの特異性を介してつながっている良い例となっている．Fujii–Mimura–Nishiura [102]はある反応拡散系の定常解の大域構造が複合分岐点付近の局所構造の拡大になっていることを数値的に示した．いわば複合分岐点にその organizing center を求めたわけである．この特異性を通して局所と大域をつなごうという方法は第6章のモデルに対しても試みられている．Bogdanov–Takens 特異点と Turing 特異点が合さった特異性が自己複製ダイナミクスを駆動している極限点の階層構造の形成に大きな役割を果たすと予想されているが，これは今後の研究に委ねられている．

シミュレーションの役割

多くの事例を挙げるまでもなく，計算機の数学に果たす役割はすべての分野に浸透してきている．電波望遠鏡や電子顕微鏡を肉眼や虫めがねにもはやおきかえることはできないように，この傾向は誰もそれをとどめ得ないだろう．その理由は簡単で，それが人間の想像力を刺激するからである．一人の人間が百年かかっても計算できなかったことを瞬時に教えてくれるならば，これはもう神をパートナーにしたような気分である．

しかし，そこには両刃の剣の落し穴がある．かなり前にオランダで分岐解追跡のソフトを開発した研究者と雑談しているときに，彼いわく「これで first author が計算機である何千という論文が生み出されるだろう」．そのような粗製濫造も多いが，実際は何を計算させるべきか，結果をどう解釈するかに多大な時間がかかる．そこで果たす数学の役割は大きいものがある．雑誌に Experimental Mathematics というのがある．代数幾何，組合せ論から wavelets まで内容は多岐にわたるが，その中には計算機と数学の微妙な関係を教えてくれるものがある．また大規模計算はデータの保持ひとつをとってもコストがかかる．明確な方針のない計算はしだいに淘汰されていくであろう．

再現性のない現象，あるいは実際の実験が困難なもの，例えば，進化，経済，脳，生命の起源などの問題に対しては計算機の中にモデルを構成して実験するというのが日常的になりつつある．これらとカオスとの関わりは深いが，より広く数学とのつながりがどのように出てくるのか定かではない．しかしある段階からは思わぬ関係の出現が予感される分野である．

幾何学化

古典的な特異摂動論と現代的なそれとの大きな違いは，幾何学化が進んできている点である．特異摂動問題の接合条件も幾何学的特異摂動論の立場からは横断性というわかりやすい概念に変わる(文献[146]参照)．第1, 2章で議論した，くり込み群も自己相似解やフラクタルとも関連し，より幾何的イメージが捉えやすいという利点がある．このあたりの背景は G. I. Barenblatt, Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics, Cambridge Univ. Press, 1996 を読まれることをすすめる([7], [227], [271]も参照)．また物理学者が書いたくり込み群の良書として，江沢らによる『くりこみ群の方法』(現代物理学叢書)がある．

力学系的見方はしばしば幾何的観点を与えてくれる．1次元空間方向を時間方向とみなして，偏微分方程式を力学系的にとらえることは Kirchgässner, Milke(たとえば[200]参照)らにより提案され，その有効性が示された．その

利点は中心多様体が構成できて種々の解が幾何的対象として捉えられるところにある．第5章で述べた特異極限法も界面という曲面の運動に帰着するという意味で幾何学化の方向といえる．これにより複雑な界面運動も徐々に解明されつつある(たとえば三村，太田らによる一連の仕事[203], [205], [232]を参照されたい)．同時にそれらは多くの未解決の数学的問題，とりわけ特異極限系の有効性と限界に関わる課題を提供している．

有限と無限のはざま

「観察する対象に比べてシステムサイズが十分大きければ，それは無限系で記述することができる.」この命題は正しいであろうか？ 境界条件などの外因的な効果ではなく，その系固有のダイナミクスにより引き起こされるものを解析したいとき，全空間を定義域とするのが自然であり，実際その方が取り扱いやすいであろう．しかし実際の現象あるいは実験は常に有限のシステムサイズで行われるので，非常に大きいが有限領域での現象が無限領域でのそれと対応しているかどうかは重要な問題となる．第4章で扱った渦巻波の安定性においてもそれは典型的に現れる．

平面全領域での渦巻波の安定性は線形解析のレベルでは，渦巻波の半径無限大の極限における平面渦巻波のスペクトルにより決定され，さらにその実部の最大値は，1次元波列のスペクトルのそれと一致する．つまり2次元渦巻波の安定性は無限遠方での1次元波列の連続スペクトルで決まる．それでは大きいが有限な領域(たとえば十分大きな半径 R の円盤領域)での渦巻波の安定性は上の連続スペクトルで常によく近似されると考えてよいであろうか？ 答えはNOである．有限領域における反応拡散方程式系のスペクトルはすべて離散的となる．したがって，半径 R が無限大となるときの，それら離散スペクトルの漸近挙動がわかれば判定可能となる．もし連続スペクトルにそれらがすべて集積するならば，無限系は良い近似を与えていることになるが，実は一般的にはそうはならない．Arnd Sheel と Björn Sandstede により導入された「絶対スペクトル」は粗く言えば，そのような離散スペクトルの $R \to +\infty$ での集積点集合であり，それらは連続スペクトルとは一般に一

致しない(詳しくは[SS]を参照). また絶対スペクトルそのものはスペクトルではないことに注意しよう. これにより渦巻波の崩壊(spiral breakup)の数学的機構についての理解が進み, また不安定フロントと不安定バックの結合による安定なパルス波の構成可能性など絶対不安定性と伝搬不安定性の違いについても深い洞察を与えることとなった. しかしながら実際の実験系におけるさまざまな現象を説明するには線形スペクトル解析の情報のみでは不十分な点もあり, まだ多くは今後の発展に委ねられている.

参考文献

[1] Alexander, J., Gardner, R., and Jones, C., *A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves*, J. Reine Angew. Math. **410**(1990), 167–212.

[2] Alikakos, N. D., Bates, P. W., and Chen, X., *Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model*, Arch. Rati. Mech. Anal. **128**(1994), 165–205.

[3] Alikakos, N. D., Bates, P. W., and Fusco, G., *Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension*, J. Diff. Eqs. **90**(1991), 81–135.

[4] Alikakos, N. D. and Fusco, G., *Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions*, *The Motion of Bubbles*, Arch. Rati. Mech. Anal. **141**(1998), 1–61.

[5] Amick, C. J. and McLeod, J. B., *A singular perturbation problem in needle crystal*, Arch. Rat. Mech. Anal. **109**(1990), 139–171.

[6] Angenent, S. B., *The Morse-Smale property for semilinear parabolic equation*, J. Diff. Eqs. **62**(1986), 427–442.

[7] Aronson, D. G. and Vazquez, J. L., *Anomalous exponents in nonlinear diffusion*, J. Nonlinear Sci. **5**(1995), 29–56.

[8] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F., *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation,* J. A. Goldstein, ed., Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. **466** Springer (1975), 5–49.

[9] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F., *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30**(1978), 33–76.

[10] Bahiana, M. and Oono, Y., *Cell dynamical system approach to block copolymers*, Phys. Rev. **41**(1990), 6763–6771.

[11] Barbieri, A., Hong, D.C. and Langer, J.S., *Velocity selection in the sym-*

metric model of dendritic crystal growth, Phys. Rev. **A35**(1986), 1802–1808.

[12] Bardi, M., Crandall, M. G., Evans, L. C., Soner, H. M., and Souganidis, P. E., *Viscosity Solutions and Applications*, Lec. Note in Math. **1660** Springer (1997).

[13] Barles, G., Soner, H. M. and Souganidis, P. E., *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Cont. Opt. **31**(1993), 439–469.

[14] Bates, P. W. and Fife, P. C., *Spectral comparison principles for the Cahn-Hilliard and phase-field equations, and time scales for coarsening*, Physica D**43**(1990), 335–348.

[15] Ben-Amar, M. and Moussalam, B., *Numerical results on two-dimensional dendritic solid*, Physica D**25**(1986), 155–164.

[16] Ben-Amar, M. and Pomeau, Y., *Theory of dendritic growth in a weakly undercooled meld*, Euro. Phys. Lett. **2**(1986), 307–314.

[17] Ben-Jacob, E., Brand, H., Dee, G., Kramer, L. and Langer, J.S., *Pattern Propagation in Nonlinear Dissipative Systems*, Physica D**14**(1985), 348–364.

[18] Ben-Jacob, E., Goldenfeld, N.D., Langer, J.S. and Schon, G., *Boundary-layer model of pattern formation in solidification*, Phys. Rev. A**29**(1984), 330–340.

[19] Bernoff, A. J., *Spiral wave solutions for reaction-diffusion equations in a fast reaction/slow diffusion limit*, Physica D**53**(1991), 125–150.

[20] Bethuel, T., Brezis, H. and Helein, F., *Ginzburg-Landau Vortices*, Boston, Birkhauser (1994).

[21] Boissonade, J., Dulos, E., and De Kepper, P., *Turing Patterns: From Myth to Reality*, R. Kapral and K. Showalter(eds.), Chemical Waves and Patterns, Chap. 7 (1995).

[22] Bramson, M., *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves*, Memoirs of the AMS **44**(285)(1983).

[23] Bricmont, J., Kupiainen, A. and Lin, G., *Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **47**(1994), 893–922.

[24] Bricmont, J. and Kupiainen, A., *Stability of moving fronts in the Ginzburg-Landau equation*, Commun. Math. Phys. **159**(1994), 287–318.

[25] Bricmont, J. and Kupiainen, A., *Renormalization group and the Ginzburg-Landau equation*, Commun. Math. Phys. **150**(1992), 193–208.

[26] Bronsard, L. and Kohn, R.V., *On the slowness of the phase boundary motion in one space dimension*, Comm. Pure Appl. Math. **43**(1990), 983–997.

[27] Bronsard, L. and Kohn, R.V., *Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dyanmics*, J. Diff. Eqs. **90**(1991), 211–237.

[28] Brower, R., Kessler, D., Koplik, D., and Levine, H., *Geometrical approach to moving-interface dynamics*, Phys. Rev. Lett. **51**(1983), 1111–1114.

[29] Brower, R., Kessler, D., Koplik, D., and Levine, H., *Geometrical models of interface evolution*, Phys. Rev. A**29**(1984), 1335–1342.

[30] Brunovsky, P. and Fiedler, B., *Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations*, Dynamics Reported **1**(1988), 57–90.

[31] Caginalp, G., *An analysis of a phase field model of a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. **92**(1986), 205–245.

[32] Caginalp, G., *Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations*, Phys. Rev. A**39**(1989), 5887–5896.

[33] Caginalp, G. and Chen, X., *Phase field equations in the singular limit of sharp interface problems*, On the Evolution of Phase Boundaries (Gurtin, M. and McFadden, G.B., eds.), IMA Vol. of Mathematics and its Applications Springer-Verlag **43**(1992), 1–28.

[34] Caginalp, G. and Fife, P.C., *Phase field methods for interfacial boundaries*, Phys. Rev. **B33**(1986), 7792–7794.

[35] Caginalp, G. and Fife, P.C., *Dynamics of layered interfaces arising from phase boundaries*, SIAM J. Appl. Math. **48**(1988), 506–518.

[36] Caginalp, G. and Nishiura, Y., *The existence of traveling waves for phase equations and convergence to sharp interface models in the singular limit*, Quarterly of Appl. Math. **49**(1)(1991), 147–162.

[37] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E., *Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys. **28**(1958), 258–267.

[38] Carpenter, G., *A geometric approach to singular perturbation problems with applications to nerve impulse equations*, J. Diff. Eqs. **23**(1977), 335–367.

[39] Carr, J., *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag(1981).

[40] Carr, J., Gurtin, M.E. and Slemrod, M., *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Rati. Mech. Anal. **86**(1984), 317–351.

[41] Carr, J. and Pego, R.L., *Metastable patterns in solutions of* $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. **42**(1989), 523–576.

[42] Casten, R.C. and Holland, C.J., *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eqs. **27**(1978), 266–273.

[43] Chafee, N., *Asymptotic behavior for solutions of a one dimensional parabolic equation with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eqs. **18**(1975), 111–135.

[44] Chafee, N. and Infante, E.F., *A bifurcation problem for a nonlinear parabolic equation*, J. Appl. Anal. **4**(1974), 17–37.

[45] Chen, L.Y., Goldenfeld, N. and Oono, Y., *Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory*, Phys. Rev. E**54**(1)(1996), 376–394.

[46] Chen, L.Y., Goldenfeld, N., Oono, Y. and Paquette, G., *Selection, stability and renormalization*, Physica A**204**(1994), 113–133.

[47] Chen, X., *Hele-Shaw problem and area preserved curve shortening motion*, Arch. Rati. Mech. Anal. **123**(1993), 117–151.

[48] Chen, X., Hong, J. and Yi, F., *Existence, uniqueness and regularity of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem*, Comm. Partial Differential Equations **21**(1996), 1705–1727.

[49] Chen, X. and Reitich, F., *Local existence and uniqueness of solutions of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling*, J. Math. Anal. Appl. **164**(1992), 350–362.

[50] Chen, X-Y., *Dynamics of interfaces in reaction diffusion systems*, Hiroshima Math. J. **21**(1991), 47–83.

[51] Chen, X-Y., *Generation and propagation of the interface for reaction-diffusion equation*, J. Diff. Eqs. **96**(1992), 116–141.

[52] Chen, X-Y., Jimbo, S. and Morita, Y., *Stabilization of vortices in the Ginzburg-Landau equation with a Variable Diffusion Coefficient*, SIAM J. Math. Anal. **29**(4)(1998), 903–912.

[53] Chen, Y.G., Giga, Y. and Goto, S., *Uniqueness and existence of vis-*

cosity solutions of generalized mean curvature flow equations, J. Diff. Geom. **33**(1991), 744–786.

[54] Chow, S.-N. and Hale, J., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).

[55] Collet, P. and Eckmann, J-P., *The existence of dendritic fronts*, Commun. Math. Phys. **107**(1986), 39–92.

[56] Collet, P. and Eckmann, J-P., *The stability of modulated fronts*, Helvetica Phys. Acta **60**(1987), 969–991.

[57] Collet, P. and Eckmann, J-P., *Instabilities and fronts in extended systems*, Princeton Series in Physics (1990).

[58] Collet, P. and Eckmann, J-P., *The time dependent amplitude equation for the Swift-Hohenberg problem*, Commun. Math. Phys. **132**(1990), 139–153.

[59] Collet, P. and Eckmann, J-P., *Space-time behavior in problems of hydrodynamic type: a case study*, Nonlinearity **5**(1992), 1265–1302.

[60] Collet, P. and Eckmann, J-P., *Solutions without phase-slip for the Ginzburg-Landau equation*, Commun. Math. Phys. **145**(1992), 345–356.

[61] Collet, P., Eckmann, J-P. and Epstein, H., *Diffusive repair for the Ginzburg-Landau equation*, Helv. Phys. Acta **65**(1992), 56–92.

[62] Conway, E., Hoff, D. and Smoller, J., *Large time behavior of solutions of systems of reaction diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math. **35**(1978), 1–16.

[63] Crandall, M.G., Ishii, H. and Lions, P.L., *User's guide to vistosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27**(1992), 1–67.（この一部は日本語でも解説されている．石井仁司，非線形偏微分方程式の粘性解について，数学 **46**(1994)，144–157.）

[64] Davydov, V. A., Zykov, V. S. and Mikhaĭlov, A. S., *Kinematics of autowave structures in excitable media*, Sov. Phys. Usp. **34**(8)(1991).

[65] De Giorgi, E., *Convergence problems for functionals and operators*, Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagoria Ed. Bologna (1978).

[66] De Kepper, P., Perraud, J. J., Rudovics, B. and Dulos, E., *Experimental study of stationary turing patterns and their interaction with traveling waves in a chemical system*, International Journal of Bifurcation and Chaos,

4(5)(1994), 1215–1231.

[67] Dee, G., *Dynamical properties of propagating front solutions of the Amplitude Equation*, Physica D**15**(1985), 295–304.

[68] Dee, G., *Propagation into an unstable state*, J. Sta. Phys. **39**(1985), 705–717.

[69] Dee, G. and Langer, J.S., *Propagating Pattern Selection*, Phys. Rev. Lett. **50**(6)(1983).

[70] DeMottoni, P. and Schatzman, M., *Development of interfaces in* $\mathbf{R}^N$, Proc. Royal Soc. Edinburgh **116A**(1990), 207–220.

[71] Diekmann, O. (Temme, N.M. eds.), *Nonlinear Diffusion Problems*, MC Syllabus **28**, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1982).

[72] Dockery, J.D., Keener, J.P. and Tyson, J.J., *Dispersion of traveling waves in the Belousov-Zhabotinsky reaction*, Physica D**30**(1988), 117–191.

[73] Doedel, E.J., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Y.A., Sandstede, B. and Wang, X., *AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)*, ftp://ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto,(1997).

[74] Doelman, A., Gardner, R.A. and Kaper, T.J., *Stability analysis of singular patterns in the 1-D Gray-Scott model: A matched asymptotic approach*, Physica D**122**(1998), 1–36.

[75] Doelman, A., Kaper, T.J. and Zegeling, P.A., *Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model*, Nonlinearity **10**(1997), 523–563.

[76] Eckhaus, W., *The Ginzburg-Landau manifold is an attractor*, J. Nonlinear Sci. **3**(1993), 329–348.

[77] Eckmann, J-P. and Gallay, Th., *Front Solution for the Ginzburg-Landau Equation*, Commun. Math. Phys. **152**(1993), 221–248.

[78] Eckmann, J-P., Gallay, Th. and Wayne, C.E., *Phase slip and the Eckhaus instability*, Nonlinearity **8**(1995), 943–961.

[79] Eckmann, J-P. and Wayne, C.E., *Propagating fronts and the center manifold theorem*, Commun. Math. Phys. **136**(1991), 285–307.

[80] Eckmann, J-P., Wayne, C.E. and Wittwer, P., *Geometric stability analysis for periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation*, Commun. Math.

Phys. **190**(1997), 173–211.

[81] Ei, S. and Ohta, T., *Equation of motion for interacting pulses*, Phys. Rev. E**50**(6)(1994).

[82] Elliott, C. M. and Zheng, S., *On the Cahn-Hilliard equation*, Arch. Rati. Mech. Anal. **96**(1986), 339–357.

[83] Escher, J. and Simonett, G., *Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension*, Adv. Diff. Eqs. **2**(1997), 619–642.

[84] Escher, J. and Simonett, G., *A center manifold analysis for the Mullins-Sekerka model*, J. Diff. Eqs. **143**(1998), 267–292.

[85] Evans, J., *Nerve axon equations, I: Linear approximations*, Indiana Univ. Math. J. **21**(1972), 877–955.

[86] Evans, J., *Nerve axon equations, II: Stability at rest*, Indiana Univ. Math. J. **22**(1972), 75–90.

[87] Evans, J., *Nerve axon equations, III: Stability of the nerve impulse*, Indiana Univ. Math. J. **22**(1972), 577–594.

[88] Evans, J., *Nerve axon equations, IV: The stable and unstable impulses*, Indiana Univ. Math. J. **24**(1975), 1169–1190.

[89] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, GSM **19**, AMS(1998).

[90] Evans, L. C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Diff. Geom. **33**(1991), 635–681.

[91] Evans, L. C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. Amer. Math. Soc. **330**(1992), 321–332.

[92] Evans, L. C., Soner, H. M. and Souganidis, P. E., *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure. Appl. Math. **45**(1992), 1097–1123.

[93] Fiedler, B. and Mallet-Paret, J., *Connections between Morse sets for delay-differential equations*, Div. Appl. Math., Brown Univ. LCDS/CCS (1987), 32–87.

[94] Fife, P. C., *Boundary and interior transition layer phenomena for paris of second order equations*, J. Math. Anal. **54**(1976), 497–521.

[95] Fife, P. C., *Propagator-controller systems and chemical patterns, in: Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems*, eds. Vidal, C. and Pacault, A.

(Springer, Berlin 1984), 76–88.

[96] Fife, P. C., *Understanding the patterns in the BZ reagent*, J. Stat. Phys. **39**(1985), 687–701.

[97] Fife, P. C., *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*, CBM-SNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **53**, SIAM, Philadelphia(1988).

[98] Fife, P. C., *Dynamical aspects of the Cahn-Hilliard equation*, Barrett Lectures, University of Tennessee, Spring(1991).

[99] Fife, P. C. and Mcleod, J. B., *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to traveling wave solutions*, Bull. Amer. Math. Soc. **81**(1975), 1076–1078.

[100] Fife, P. C. and McLeod, J. B., *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **65**(1977), 335–361.

[101] Fisher, R. A., *The advance of advantageous genese*, Ann. Eugenics **7**(1937), 355–369.

[102] Fujii, H., Mimura, M. and Nishiura, Y., *A picture of the global bifurcation diagram in ecological interacting and diffusing systems*, Physica D**5**(1982), 1–42.

[103] Fusco, G., *A geometric approach to the dynamics of* $u_t=\epsilon^2u_{xx}+f(u)$ *for all* ϵ, Lecture Notes in Physics **359**(1990), 53–73.

[104] Fusco, G. and Hale, J. K., *Slow motion manifolds. Dormant instability and singular perturbations*, J. Dynamics Diff. Eqs. **1**(1989), 75–94.

[105] Gage, M. and Hamilton, R. S., *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23**(1986), 69–96.

[106] Gallay, Th., *A center-stable manifold theorem for differential equations in Banach spaces*, Commun. Math. Phys. **152**(1993), 249–268.

[107] Gallay, Th., *Local stability of critical fronts in nonlinear parabolic partial differential equations*, Nonlinearity **7**(1994), 741–764.

[108] Gardner, R. and Jones, C. K. R. T., *A stability index for steady state solutions of boundary value problems for parabolic systems*, J. Diff. Eqs. **91**(1991), 181–203.

[109] 儀我美一・陳蘊剛, 動く曲面を追いかけて, チュートリアル応用数理の最前線, 日本評論社(1996).

[110] Giga, Y., Goto, S., and Ishii, H., *Global existence of weak solutions for interface equation coupled with diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal. **23**(4) (1992), 821–835.

[111] Giga, Y. and Sato, M., *Neumann problem for singular degenerate parabolic equations*, Diff. and Integral Eqs. **6**(6) (1993), 1217–1230.

[112] Gilbarg, D. and Trüdinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second-order*, Springer-Verlag, New York(1983).

[113] Giusti, E., *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser(1984).

[114] Gray, P. and Scott, S. K., *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system* $A+2B \to 3B$, $B \to C$, Chem. Eng. Sci. **39**(1984), 1087–1097.

[115] Grayson, M., *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26**(1987), 285–314.

[116] Gurtin, M. and Matano, H., *On the structure of equiliblium phase transitions whitin the gradient theory of fluids*, Quarterlly Appl. Math. **46**(1988), 302–317.

[117] Hale, J. K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amer. Math. Soc., Providence(1998).

[118] Hale, J. K. and Massatt, P., *Asymptotic behavior of grandient-like systems*, Dynamical Systems II (A. R. Bednarek and L. Cesari, eds.), Academic Press(1982), 85–101.

[119] Hale, J. K. and Sakamoto, K., *Existence and stability of transition layers*, Japan J. Appl. Math. **5**(1988), 367–405.

[120] Hammersley, J. M. and Mazzarino, G., *A differential equation connected with the dendritic growth of crystals*, IMA J. Appl. Math. **42**(1989), 43–75

[121] Harten, A.V., *On the validity of the Ginzburg-Landau equation*, J. Nonlinear Sci. **1**(1991), 397–422.

[122] Hastings, S., *On traveling wave solutions of the Hodgkin-Huxley equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60**(1976), 229–257.

[123] Hayase, Y. and Ohta, T., *Sierpinsky gasket in a reaction diffusion system*, Phys. Rev. Lett. **81**(1998), 1726.

[124] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer Lecture Notes in Math. **840**(1981).

[125] Henry, D., *Some infinite dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic differential equations*, J. Diff. Eqs. **59**(1985), 165–205.

[126] Hilhorst, D., Nishiura, Y. and Mimura, M., *A free boundary problem arising in some reacting-diffusing system*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **118A**(1991), 355–378.

[127] Hohenberg, P. C. and Halperin, B. I., *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys. **49**(1977), 435–479.

[128] Honjo, H. and Sawada, Y., *Quantitative measurements on the morphology of a NH_4Br dendritic crystal growth in a capillary*, J. Crystal Growth **58**(1982), 297–303.

[129] Horway, G. and Cahn, L. W., *Dendritic and spheroidal growth*, Acta Metall. **9**(1961), 695–705.

[130] Howard, L. N. and Kopell, N., *Slowly varying waves and shock structures in reaction-diffusion equations*, Stud. Appl. Math. **56**(1977), 95–145.

[131] Huang, S. C. and Glicksman, M. E., *Fundamentals of dendritic solidafication- I, Steady state tip growth- II, Development of sidebranch structure*, Acta Metall. **29**(1980), 701–734.

[132] Huisken, G., *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geom. **20**(1984), 237–266.

[133] Ikeda, H., *Singular perturbation approach to stability properties of travelling wave solutions of reaction-diffusion system*, Hiroshima Math. J. **19**(1989), 587–630.

[134] Ikeda, T. and Nishiura, Y., *Pattern selection for two breathers*, SIAM J. Appl. Math. **54**(1)(1994), 195–230.

[135] Ikeda, H., Nishiura, Y. and Suzuki, H., *Stability of travelling waves and a relation between the Evans function and SLEP equation*, J. Reine Angew. Math. **475**(1996), 1–37.

[136] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion*

by mean curvature, J. Diff. Geom. **38**(1993), 417–461.

[137] Iooss, G., Mielke, A. and Demay, Y., *Theory of steady Ginzburg-Landau equation in hydrodynamic stability problems*, European J. Mech. B/Fluids **3**(1989), 229–268.

[138] Ito, M., *A remark on singular perturbation methods*, Hiroshima Math. J. **14**(1984), 619–629.

[139] Jensen, O., Pannbacker, V. O., Mosekilde, E., Dewel, G. and Borckmans, P., *Localized structures and front propagation in the Lengyel-Epstein model*, Phys. Rev. E**50**(2)(1994), 736–749.

[140] Jimbo, S. and Morita, Y., *Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal. **22**(1994), 753–770.

[141] Jimbo, S. and Morita, Y., *Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a rotational domain*, SIAM J. Math. Anal. **27**(1996), 1360–1385.

[142] Jimbo, S. and Morita, Y., *Stable solutions with zeros to the Ginzburg-Landau equation with Neumann boundary condition*, J. Diff. Eqs. **128**(1996), 596–613.

[143] Jimbo, S., Morita, Y. and Zhai, J., *Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain*, Comm. Partial Diff. Eqs. **20**(1995), 2093–2112.

[144] Jimbo, S. and Zhai, J., *Ginzburg-Landau equation with magnetic effect: non-simply-connected domains*, J. Math. Soc. Japan **50**(3)(1998).

[145] Jones, C. K. R. T., *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system*, Trans. Amer. Math. Soc. **286**(1984), 431–469.

[146] Jones, C. K. R. T., *Geometric Singular Perturbation Theory*, Lec. Notes in Math. **1609**(1995), 44–118, Springer.

[147] Jones, C. K. R. T., Kopell, N. and Langer, R., *Construction of the FitzHugh-Nagumo pulse using differential forms, in Patterns and Dynamics in Reactive Media*, Swinney, H., Aris, G., and Aronson, D., IMA Volumes in Mathematics and its Applications, **37**(1991), Springer-Verlag, New York.

[148] Kapral, R. and Showalter, K., *Chemical Waves and Patterns*, Kluwer Academic Publishers(1995).

[149] Karma, A., *Universal limit of spiral wave propagation in excitable media*, Phys. Rev. Lett. **66**(1991), 2274.

[150] Karma, A., *Scaling regime of spiral wave propagation in single-diffusive media*, Phys. Rev. Lett. **68**(1992), 397.

[151] Kawasaki, L. and Ohta, T., *Kink dynamics one-dimensional nonlinear systems*, Physica A**116**(1982), 573–593.

[152] Keener, J. P., *A geometrical theory for spiral waves in excitable media*, SIAM J. Appl. Math. **46**(1986), 1039–1059.

[153] Keener, J. P., *The core of the spiral*, SIAM J. Appl. Math. **52**(5)(1992), 1370–1390.

[154] Keener, J. P., *Symmetric spirals in media with relaxation kinetics and two diffusing species*, Physica D**70**(1994), 61–73.

[155] Keener, J. P. and Tyson, J. J., *Spiral waves in the Belousov-Zhabotinsky reaction*, Physica D**21**(1986), 307–324.

[156] Kessler, D., Koplic, J., and Levin, H., *Geometrical models of interface evolution- III. Theory of dendrite growth*, Phys. Rev. A**31**(1985), 1712–1717.

[157] Kessler, D., Koplic, J. and Levin, H., *Steady-state dendritic crystal growth*, Phys. Rev. A**33**(1986), 3352.

[158] Kessler, D. A. and Kupferman, R., *Spirals in excitable media: the free-boundary limit with diffusion*, Physica D**97**(1996), 509–516.

[159] Kessler, D. A. and Levine, H., *Diffusive boundary layers in the free-surface excitable medium spiral*, Phys. Rev. E**55**(1997), 3847–3850.

[160] Kessler, D. A., Levine, H. and Reynolds, W. N., *Theory of the spiral core in excitable media*, Physica D**70**(1994), 115–139.

[161] Kirchgässner, K., *On the nonlinear dynamics of travelling fronts*, J. Diff. Eqs. **96**(1992), 256–278.

[162] Kirrmann, P., Schneider, G. and Mielke, A., *The validity of modulation equations for extended systems with cubic nonlinearities*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **122A**(1992), 85–91.

[163] Kishimoto, K. and Weinberger, H. F., *The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction diffusion systems on convex domains*, J. Diff. Eqs. **58**(1985), 15–21.

[164] Kobayashi, R., *Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth*, Physica D**63**(1993), 410–423.

[165] Kobayashi, R., *A numerical approach to three-dimensional dendritic solidification*, Experimental Math. **3**(1)(1994), 59–81.

[166] Kohn, R. V. and Müller, S., *Surface energy and microstructure in coherent phase transitions*, Comm. Pure Appl. Math., **47**(1994), 405–435

[167] Kohn, R. V. and Sternberg, P., *Local minimizers and singular parturbation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A**111**(1989), 69–84.

[168] Kokubu, H., *Homoclinic and heteroclinic bifurcation of vector fields*, Japan J. Appl. Math. **5**(1987), 455–501.

[169] Kokubu, H., Mischaikow, K., Nishiura, Y., Oka, H. and Takaishi, T., *Connecting Orbit Structure of Monotone Solutions in the Shadow System*, J. Diff. Eqs. **140**(2)(1997), 309–364.

[170] Kokubu, H., Nishiura, Y., Oka, H., *Heteroclinic and bifurcation in bistable reaction diffusion systems*, J. Diff. Eqs. **86**(2)(1990), 260–341.

[171] Kolmogoroff, A., Petrovsky, I. and Piscounoff, N., *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bull. Univ. Moscou, Ser. Internat., Sec. A, **1**(1937)#6, 1–25.

[172] Kondo, S., Asai, R., *A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angel fish Pomacanthus*, Nature **376**(1995), 765.

[173] 小谷眞一，保野博，微分方程式と固有関数展開，岩波書店(2006).

[174] Kruskal, M. D. and Segur, H., *Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth*, Stud. Appl. Math. **85**(1991), 129–181.

[175] Krylov, N. and Bogoliubov, N. N., *The application of methods of nonlinear mechanics to the theory of stationary oscillations*, Publication 8 of the Ukrainian Academy of Science, Kiev (1934).

[176] Kunihiro, T., *A geometrical formulation of the renormalization group Method for Global Analysis*, Prog. Theor. Phys. **94**(1995), 503–514.

[177] 蔵本由紀，川崎恭治，山田道夫，甲斐昌一，篠本滋，パターン形成，朝倉書店(1991).

[178] Kuznetsov, Y-A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-

Verlag(1997).

[179] Langer, J. S., *Studies in the theory of interfacial stability-II. Moving symmetric model*, Acta Metall. **25**(1977), 1121–1137.

[180] Langer, J. S., *Instabilities and pattern formation in crystal growth*, Reviews of Modern Physics(1980), 1–28.

[181] Langer, J. S., *Instabilities and pattern formation*, Academic Press (1982).

[182] Langer, J. S., *Dendrites, viscous fingers, and the theory of pattern formation*, Science **243**(1989).

[183] Langer, J. S. and Müller-Krumbhaar, H., *Theory of dendritic growth II. Instabilities in the limit of vanishing surface tension*, Acta Metall. **26**(1978), 1689–1695.

[184] Langer, R., *Existence and uniqueness of pulse solution to the FitzHugh-Nagumo equations*, Ph. D. Thesis, Northeastern University, 1980.

[185] Lee, K. J., McCormick, W. D., Pearson, J. E. and Swinney, H. L., *Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system*, Nature **369**(1994), 215–218.

[186] Lee, K. J. and Swinney, H. L., *Lamellar structures and self-replicating spots in a reaction-diffusion system*, Phys. Rev. E**51**(1995), 1899–1915.

[187] Lengyel, I. and Epstein, I. R., *A chemical approach to designing Turing patterns in reaction–diffusion systems*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **89**(1992), 3977.

[188] Lin, F. H., *Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices*, Commun. Pure Appl. Math. **49**(1996), 323–359, and *A remark on the previous paper. "Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices"*, Commun. Pure Appl. Math. **49**(1996), 361–364.

[189] Lin, F. H., *Complex Ginzburg-Landau equations and dynamics of vortices, filaments, and codimension-2 submanifolds*, Commun. Pure Appl. Math. **51**(1998), 385–441.

[190] Lin, X. B., *Shadowing lemma and singularly perturbed boundary value problems*, SIAM J. Appl. Math. **49**(1)(1989), 26–54.

[191] Luckhaus, S., *Solution of the two phase Stefan problem with the Gibbs-Thompson law for the melting temperature*, European J. Appl. Math. **1**(1990),

101–111.

[192] Maginu, K., *Stability of periodic travelling wave solutions of a nerve conduction equation*, J. Math. Biology **6**(1978), 49–57.

[193] Maginu, K., *Geometrical characteristics associated with stability and bifurcations of periodic traveling waves in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math. **45**(1985).

[194] Mallet-Paret, J., *Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright*, J. Diff. Eqs. **22**(1976), 331–348.

[195] Matano, H., *Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations*, J. Math. Kyoto Univ. **18**(1978), 224–243.

[196] Matano, H., *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15**(1979), 401–458.

[197] Matano, H., *Nonincrease of the lap number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. **29**(1982), 401–441.

[198] Meiron, D., *Selection of steady states in the two-dimensional symmetric model of dendritic growth*, Phys. Rev. **A33**(1986), 2704–2715.

[199] Meron, E., *Pattern formation in excitable media*, Physics Reports **218**(1)(1992), 1–66.

[200] Mielke, A., *Reducation of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications*, Math. Meth. Appl. Sci. **10**(1988), 51–66.

[201] 三池秀敏，森義仁，山口智彦，非平衡系の科学：反応・拡散系のダイナミクス，講談社サイエンティフィク(1997).

[202] Mikhailov, A. S., *Kinematical theory of spiral waves in excitable media: Comparison with numerical simulations*, Physica D**52**(1991), 379–397.

[203] Mimura, M. and Nagayama, M., *Nonannihilation dynamics in an exothermic reaction-diffusion system with mono-stable excitability*, Chaos. **7**(4)(1997), 817–826.

[204] Mimura, M., Tabata, M. and Hosono, Y., *Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter*, SIAM J. Math. Anal. **11**(1980), 613–631.

[205] Mimura, M. and Tsujikawa, T., *Aggregating pattern dynamics in a chemo-*

taxis model including growth, Physica A**230**(1996), 499–543.

[206] Modica, L., *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rati. Mech. Anal. **98**(1987), 123–142.

[207] Modica, L., *Gradient theory of phase transitons with boundary contact energy*, Analyse Nonlineaire **5**(1987), 453–486.

[208] 森肇，蔵本由紀，散逸構造とカオス，現代物理学叢書，岩波書店(2000).

[209] Müller, S., *Singular perturbation as a selection criterion for periodic minimizing sequences*, Calculus of Variations and PDE **1**(1993), 169–204.

[210] Müller-Krumbhaar, H. and Langer, J. S., *Theory of dendritic growth III. Effects of surface tension*, Acta Metall. **26**(1978), 1697-1708.

[211] Mullins, W. W. and Sekerka, R. F., *Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy*, J. Appl. Phys. **3**(1964), 444–451.

[212] Murray, J. M., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, N.Y. (1989).

[213] Neu, J., *Vortices in complex scalar fields*, Physica D**43**(1990), 385–406.

[214] Newell, A. C., Passot, T. and Lega, J., *Order parameter equations for patterns*, Annu. Rev. Fluid. Mech. **25**(1993), 399–453.

[215] Nii, S., *A Topological Proof of Stability of N-Front Solutions of the FitzHugh-Nagumo Equations*, J. Dynam. Diff. E. **11**(3)(1999), 515–555.

[216] ニコリス，G., プリゴジーヌ，I.: 小畠陽之助，相沢洋二訳，散逸構造，岩波書店(1980).

[217] Nishiura, Y., *Global structure of bifurcating solutions if some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **13**(1982), 555–593.

[218] Nishiura, Y., *Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit*, Dynamics Reported, **3**(1994), 25–103.

[219] Nishiura, Y. and Fujii, H., *Stability of singulary perturbed solutions to systems of reaction diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal. **18**(1987), 1726–1770.

[220] Nishiura, Y. and Mimura, M., *Layer oscillations in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math. **49**(1989), 481–514.

[221] Nishiura, Y., Mimura, M., Ikeda, H. and Fujii, H., *Singular limit analysis of stability of travelling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **21**(1990), 85–122.

[222] Nishiura, Y. and Ohnishi, I., *Some mathematical aspects of the micro-phase separation in diblock copolymers*, Physica D**84**(1995), 31–39.

[223] Nishiura, Y. and Suzuki, H., *Nonexistence of higher dimensional stable Turing patterns in the singular limit*, SIAM J. Math. Anal. **29**(5)(1998), 1087–1105.

[224] Nishiura, Y. and Ueyama, D., *A hidden bifurcational structure for self-replicating dynamics*, ACH-Models in Chemistry **135**(3)(1998), 343–360.

[225] Nishiura, Y. and Ueyama, D., *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D**130**(1999),73–104.

[226] Novick-Cohen, A. and Segel, L. A., *Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation*, Physica D**10**(1984), 277–298.

[227] 大野克嗣，非線形性とくりこみ，日本物理学会誌 **52**(7)(1997), 501–507.

[228] Ohnishi, I., Nishiura, Y., Imai, M. and Matsushita, Y., *Analytical solutions describing the phase separation driven by a free energy functional containing a long-range interaction term*, Chaos **9**(2)(1999), 329–341.

[229] 太田隆夫，界面ダイナミクスの数理，日本評論社(1997).

[230] Ohta, T., Jasnow, D. and Kawasaki, K., *Universal scaling in the motion of random interfaces*, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 1223–1226.

[231] Ohta, T. and Kawasaki, K., *Equilibrium morphology of block copolymer melts*, Macromolecules **19**(1986), 2621–2632.

[232] Ohta, T. and Kiyose, J., *Collision of Domain Boundaries in a Reaction-Diffusion System*, J. Phys. Soc. Japan **65**(7)(1996), 1967–1970.

[233] Ohta, T. and Mimura, M., *Pattern dynamics in excitable reaction-diffusion media*, Formation, Dynamics and Stabilities of Patterns, Kawasaki, K., Suzuki, M. and Onuki, A., eds. **1**, World Scientific(1990).

[234] Ohta, T., Mimura, M. and Kobayashi, R., *Higher-dimensional localized pattern in excitable media*, Physica D**34**(1989), 115–144.

[235] Osher, S. and Sethian, A., *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comp. Phys. **79**(1988), 12–49.

[236] Pearson, J. E., *Complex patterns in a simple system*, Science **216**(1993), 189–192.

[237] Pego, R. L., *Front migration in the nonlinear Cahn-Hilliard equation*, Proc. Roy. Soc. London **A422**(1989), 261–278.

[238] Pelce, P., *Dynamics of Curved Fronts*, Academic Press ed. (1988).

[239] Pelce, P. and Sun, J., *Wave fronts interaction in steadily rotating spirals*, Physica D**48**(1991), 353–366.

[240] Penrose, O. and Fife, P. C., *Thermodynamically Contest Models of Phase-field Type for the Kinetics of Phase Transitions*, Physica D**43**(1990), 44–62.

[241] Petrov, V., Scott, S. K. and Showalter, K., *Excitability, wave reflection, and wave splitting in a cubic autocatalysis reaction-diffusion system*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, **347**(1994), 631–642.

[242] Pillet, C. A., *Stabilization of needle-crystals by the Gibbs-Thomson effect*, Commun. Math. Phys. **140**(1991), 241–274.

[243] Powell, J. A., Newell, A. C. and Jones, C. K. R. T., *Competition between generic and nongeneric fronts in envelope equations*, Phys. Rev. A **44**(6)(1991), 3636–3652.

[244] Rashevsky, N., Mathematical Biophysics Univ. of Chicago Press (1938).

[245] Rasmussen, K. E., Mazin, W., Mosekilde, E., Dewel, G. and Borckmans, P., *Wave-splitting in the bistable Gray-Scott model*, International Journal of Bifurcation and Chaos **6**(6)(1996), 1077–1092.

[246] Reynolds, W. N., Pearson, J. E. and Ponce-Dawson, S., *Dynamics of self-replicating patterns in reaction diffusion systems*, Phys. Rev. Lett. **72**(17)(1994), 1120–1123.

[247] Reynolds, W. N., Ponce-Dawson, S. and Pearson, J. E., *Self-replicating spots in reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. E**56**(1)(1997), 185–198.

[248] Rinzel, J. and Terman, D., *Propagation in a bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math. **42**(1982), 1111–1137.

[249] Rubinstein, J., Schatzman, M. and Sternberg, P., *Collapse of vortex Links in the Ginzburg-Landau flow*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **322**(1996), 31–35.

[250] Saarloos, W. V., *Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection*, Phys. Rev. A**37**(1)(1988), 211–229.

[251] Saarloos, W. V., *Front propagation into unstable states. II Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence*, Phys. Rev. A**39**(12)(1989), 6367–6389.

[252] Saarloos, W. V. and Hohenberg, P. C., *Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations*, Physica D**56**(1992), 303–367.

[253] Saarloos, W. V. and Weeks, J. D., *Boundary-layer formulation of dentritic growth: Existence of a family of steady-state needle solutions*, Phys. Rev. Lett. **55**(1985), 1685–1688

[254] Sakamoto, K., *Construction and stability analysis of transition layer solutions in reaction-diffusion systems*, Tohoku Math. J. **42**(1990), 17–44.

[255] Sakamoto, K., *Internal layers in high-dimensional domains*, Proceedings of Roy. Soc. Edinburgh. Section A. Mathematics **128**(2)(1998), 359–401.

[256] Sandstede, B., *Stability of multiple-pulse solutions*, Amer. Math. Soc. **350**(1998), 420–472.

[257] Sattinger, D. H., *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Adv. Math. **22**(1976), 312–355.

[258] Sattinger, D. H., *Weighted norms for the stability of traveling waves*, J. Diff. Eqs. **25**(1977), 130–144.

[259] 沢田康次, 自己組織系の科学, オーム社(1996).

[260] Schneider, G., *Error estimates for the Ginzburg-Landau approximation*, ZAMP **45**(1994), 433–457.

[261] Schneider, G., *A new estimate for the Ginzburg-Landau approximation on the real axis*, J. Nonlinear Sci. **4**(1994), 23–34.

[262] Schneider, G., *Analyticity of Ginzburg-Landau modes*, J. Diff. Eqs. **121**(1995), 233–257.

[263] Schneider, G., *Diffusive stability of spatial periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation*, Commun. Math. Phys. **178**(1996), 679–702.

[264] Sijbrand, J., *Properties of center manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **289**(1985), 431–469.

[265] Simon, L., *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations with applications to geometric problems*, Ann. of Math. **118**(1983), 525–571.

[266] Soner, M. H., *Convergence of the phase-field equations to the Mullins-*

Sekerka problem with kinetic undercooling, Arch. Rati. Mech. Anal. **131**(1995), 139–197.

[267] Sternberg, P., *The effect of a singular perturbation on noncovex variational problems*, Arch. Rati. Mech. Anal. **101**(1988), 209–260.

[268] Stoth, B. E. E., *Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Mullins-Sekerka problem in spherical symmetry*, J. Diff. Eqs. **125**(1996), 154–183.

[269] Suzuki, H., *Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems*, Hokkaido Math. J. **26**(1997), 631–667.

[270] Taniguchi, M. and Nishiura, Y., *Instability of planar interfaces in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **25**(1994), 99–134.

[271] 田崎晴明，くりこみ群とは何か，パリティ **11**(6)(1996).

[272] Turing, A. M., *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **B327**(1952), 37–72.

[273] Tyson, J. J. and Kenner, J. P., *Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review)*, Physica D**30**(1988), 327–361.

[274] Ueyama, D., *Dynamics of self-replicating patterns in the one-dimensional Gray-Scott model*, Hokkaido Math. J. **28**(1999), 175–210.

[275] Ward, M. J., *Metastable bubble solutions for the Allen-Cahn equation with mass conservation*, SIAM J. Appl. Math. **56**(1996), 1247–1279.

[276] Wayne, C. E., *Invariant manifolds for parabolic partial differential equations on unbounded domains*, Arch. Rati. Mech. Anal. **138**(1997), 279–306.

[277] Weinstein, M. I. and Xin, J., *Dynamic stability of vortex solutions of Ginzburg-Landau and nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **180**(1996), 389–428.

[278] Winfree, A. T., *Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media*, Chaos **1**(3)(1991), 303–334.

[279] 山口智彦，Turing 構造と反応拡散系におけるパターン形成，物質工学工業技術研究所報告，第 5 巻 第 4 号(1997)別冊 151–164.

[280] Yanagida, E., *Stability of stationary in space-dependent population growth processes*, J. Math. Biol. **15**(1982), 401–441.

[281] Yanagida, E., *Stability of fast travelling pulse solutions of the FitzHugh–Nagumo equations*, J. Math. Biol. **22**(1985), 81–104.

[282] Zelenyak, T. J., *Stabilization of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable*, Diff. Eqs. **4**(1986), 17–22.

文献追記

[BLSP1] Bode, M., Liehr, A. W., Schenk, C. P. and Purwins, H.-G., *Interaction of dissipative solitons: particle-like behaviour of localized structures in a three-diffusion system*, Physica D**161**(2002), 45–66.

[CO] Chen, X. and Oshita, Y., *An Application of the Modular Function in Nonlocal Variational Problems*, Arch. rational Mech. Anal. **186**(2007), 109–132.

[DCFKSW] Doedel, E. J., Champneys, A. R., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Y. A., Sandstede, B. and Wang, X., *AUTO97:Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)*, ftp://ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto, (1997).

[DPRD] De Kepper, P., Perraud, J. J., Rudovics, B. and Dulos, E., *Experimental study of stationary Turing patterns and of their interaction with travelling waves in a chemical system*, International Journal of Bifurcation and Chaos. **4**(5)(1994), 1215–1231.

[EI1] Ei, S.-I., *The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems*, J. Dynam. Diff. Eqs. **14**(2002), 85–137.

[EMN] Ei, S.-I., Mimura, M. and Nagayama, M., *Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems*, Physica D**165**(2002), 176–198.

[EMS] Elphick, C., Meron, E. and Spiegel, E. A., *Patterns of propagating pulses*, SIAM J. Appl. Math. **50**(2)(1990), 490–503.

[EMS1] Elphick, C., Meron, E. and Spiegel, E. A., *Spatiotemporal complexity in traveling patterns*, Phys. Rev. Lett. **61**(1988), 496–499.

[EMS2] Ei, S.-I., Mimura, M. and Nagayama, M., *Dynamics of spot-solutions in reaction diffusion systems in two dimensional space*, preprint.

[ENU] Ei, S.-I., Nishiura, Y. and Ueda, K.-I., 2^n*-splitting or Edge-splitting -A Manner of splitting in dissipative systems*, Japan J. Ind. Appl. Math.

18(2)(2001), 181–205.

[HO] Hayase, Y. and Ohta, T., *Sierpinski Gasket in a Reaction-Diffusion system*, Phys. Rev. Lett. **81**(8)(1998), 1726.

[IN1] Iima, M. and Nishiura, Y., *Collision of localized traveling-wave convection cells in binary fluid*, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications. **22**(2005), 289–303.

[IN2] Iima, M. and Nishiura, Y., *Unstable periodic solution controlling collision of localized convection cells in binary fluid mixture*, Physica D, in press.

[KAMI] Kawaguchi, S. and Mimura, M., *Collision of traveling waves in a reaction-diffusion system with global coupling effect*, SIAM J. Appl. Math. **59**(1999), 920–941.

[KM] Krischer, K. and Mikhailov, A., *Bifurcation to traveling spots in reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. Lett. **73**(1994), 3165–3168.

[KMM] Kaczynski, T., Mischaikow, K. and Mrozek, M., *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences **157**(2004) Springer.

[LMABP] Liehr, A. W., Moskalenko, A. S., Astrov, Y. A., Bode, M. and Purwin, H.-G., *Rotating bound states of dissipative solitons in systems of reaction-diffusion type*, Eur. Phys. J. **B37**(2004), 199–204.

[LMPS] Lee, K. J., McCormick, W. D., Pearson, J. E. and Swinney, H. L., *Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system*, Nature, **369**(1994), 215–218.

[MEI] Meinhardt, H., et al., *The Algorithmic of Beauty of Sea Shells*, Springer (1995).

[MIU] 三村昌泰編著, パターン形成とダイナミクス, 『非線形・非平衡現象の数理』4, 東京大学出版会, 2006.

[NIS1] 西浦廉政, 数学と化学・生物学—自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって—, 数学 **52**(4)(2000), 404–416.

[NIS2] Nishiura, Y., *Far-from-equilibrium Dynamics, Translations of Mathematical Monographs*, AMS. **209**(2002).

[NIS3] 西浦廉政, 自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス, 岩波講座『物理の世界』, 岩波書店 (2003).

[NOU1] Nishiura, Y., Oyama, Y. and Ueda, K.-I., *Dynamics of traveling*

pulses in heterogeneous media of jump type, Hokkaido Math. J. **36**(1)(2007), 207–242.

[NTU1] Nishiura, Y., Teramoto, T. and Ueda, K.-I., *Scattering and separators in dissipative systems*, Phys. Rev. E**67**(2003), 056210.

[NTU2] Nishiura, Y., Teramoto, T. and Ueda, K.-I., *Dynamic transitions through scattors in dissipative systems*, Chaos **13**(3)(2003), 962–972.

[NTU3] Nishiura, Y., Teramoto, T. and Ueda, K.-I., *Scattering of traveling spots in dissipative systems*, Chaos **15**(2005), 047509–047519.

[NTYU1] Nishiura, Y., Teramoto, T., Yuan, X. and Ueda, K., *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media*, Chaos **17**(3)(2007), 037104.

[NU] Nishiura, Y. and Ueyama, D., *Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model*, Physica D**150**(2001), 137–162.

[O1] Oshita, Y., *On stable nonconstant stationary solutions and mesoscopic patterns for FitzHugh-Nagumo equations in higher dimensions*, J. Diff. Eqs. **188**(2003). 110–134.

[OHT] 太田隆夫, 非平衡系の物理学, 裳華房 (2000).

[PEA] Pearson, J. E., *Complex patterns in a simple system*, Science **216** (1993), 189–192.

[SOBP] Schenk, C. P., Or-Guil, M., Bode, M. and Purwins, H.-G., *Interacting Pulses in Three-Component Reaction-Diffusion Systems on Two-Dimensional Domains*, Phys. Rev. Lett. **78**(1997), 3781–3784.

[SS] Sandstede, B., and Sheel, A., *Absolute and convective instabilities of waves on bounded and large bounded domains*, Physica D**145**(2000), 233–277.

[SYUO] Shoji, H., Yamada, K., Ueyama, D. and Ohta, T., *Turing patterns in three dimensions*, Phys. Rev. E**75**(2007), 046212.

[TG] 寺本 敬, Gameiro, M., 複雑な空間パターンへの計算ホモロジーの応用, 計算ホモロジーとその応用(応用数理サマーセミナー 2007, 日本応用数理学会・北海道大学数学 COE 共催), Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, No. 124 (2007) [in Japanese].

[TN1] Teramoto, T. and Nishiura, Y., *Double gyroid morphology in a gradient system with nonlocal effects*, J. Phys. Soc. Jpn. **71**(7)(2002), 1611–1614.

[TN2] 寺本 敬, 西浦 廉政, ミクロ相分離のモルフォロジーとダイナミクス, 応

用数理, **15**(3)(2005) 16–27.

[TNNUU] Takagi, S., Nishiura, Y., Nakagaki, T., Ueda, T. and Ueda, K.-I., *Indecisive behavior of amoeba crossing an environmental barrier, Proceedings of Int. Symp. on Topological Aspects of Critical Systems and Networks*, World Scientific Publishing Co. (2007), 86–93.

[TUN1] Teramoto, T., Ueda, K.-I. and Nishiura, Y., *Phase-dependent output of scattering process for traveling breathers*, Phys. Rev. E**69**(4)(2004), 056224.

[VUE] Vanag, V. K. and Epstein, I. R., Localized patterns in reaction-diffusion systems, Chaos **17**(2007), 037110.

[YTU1] Yuan, X., Teramoto, T. and Nishiura, Y., *Heterogeneity-induced defect bifurcation and pulse dynamics for a three-component reaction-diffusion system*, Phys. Rev. E**75**(3)(2007), 036220.

欧文索引

和文索引

サ 行

タ 行

ヤ 行

ラ 行

西浦廉政

1950年生まれ
1978年京都大学大学院理学研究科数学専攻単位修得退学
現在　北海道大学電子科学研究所教授
専攻　非線形解析

非平衡ダイナミクスの数理

2009年1月16日　第1刷発行
2009年4月15日　第2刷発行

著　者　西浦廉政（にしうらやすまさ）

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・大日本印刷　カバー印刷・NPC　製本・松岳社

ISBN 978-4-00-005881-0　Printed in Japan